Roulette e pi greco - II

Fulvio Bisi[1] Anna Torre[1]

[1]Dipartimento di Matematica - Università di Pavia

Stage Orientamento 14 giugno 2017

Probabilità condizionata

La **probabilità condizionata** $P(A|B)$ (o $P_B(A)$) di un evento A rispetto a un evento B è la probabilità che si verifichi A, sapendo che B è verificato.
Esprime una "correzione" delle aspettative per A, per effetto dall'osservazione di B.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(B)}.$$

Ha senso solo se B ha una probabilità non nulla di verificarsi.

- Due eventi A e B sono **indipendenti** se e solo se

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$$

Il paradosso di Monty Hall

Ci sono tre porte, A, B, C; dietro una porta c'è un'automobile nuova, dietro le altre due una capra.
Il presentatore chiede al giocatore di scegliere una porta, cercando di 'beccare' la vetura. Fatta la scelta del giocatore, il presentatore apre una porta fra le due rimanenti e mostra una capra.
Poi chiede al giocatore se tiene la sua porta scelta o se la cambia con la rimanente.
Cosa conviene fare?

Il paradosso delle tre scatole

Ci sono tre scatole, A, B, C; in ciascuna scatola ci sono due buste. In ogni busta c'è una moneta; in tutto ci sono 3 monete d'argento e 3 monete d'oro.

- Il giocatore sceglie una scatola; quale è la probabilità che contenga due monete diverse?
- Ora il giocatore apre una busta, e trova una moneta d'oro. Qual è la probabilità che la scatola scelta abbia l'altra moneta d'oro?

Il teorema di Bayes

Consideriamo un insieme di alternative $A_1, \ldots, A_n$ che partizionano lo spazio degli eventi Ω (ossia

$$A_i \cap A_j = \varnothing \; \forall i \neq j, \quad \text{e} \quad \cup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$$

si trova la seguente espressione per la probabilità condizionata:

$$P(A_i|E) = \frac{P(E|A_i)P(A_i)}{P(E)} = \frac{P(E|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E|A_j)P(A_j)}$$

Il teorema di Bayes in azione

In una scuola ci sono il 60% di studenti maschi e il 40% di studentesse femmine. Le studentesse indossano in egual numero gonne o pantaloni; gli studenti indossano tutti quanti i pantaloni.

Un osservatore, da lontano, nota un generico studente con i pantaloni. Qual è la probabilità che quello studente sia una femmina?

Il problema può essere risolto con il teorema di Bayes, ponendo l'evento A che lo studente osservato sia femmina, e l'evento B che lo studente osservato indossi i pantaloni.

Per calcolare $P(A|B)$, dovremo sapere:

- $P(A)$, ovvero la probabilità che lo studente sia femmina senza nessun'altra informazione.
- $P(A')$ che lo studente sia maschio senza nessun'altra informazione. A' è l'evento complementare di A, quindi $3/5$.
- $P(B|A)$ che uno studente femmina indossi i pantaloni.
- $P(B|A')$ che uno studente indossi i pantaloni, noto che lo studente è maschio.
- $P(B)$ che uno studente qualsiasi (maschio o femmina) indossi i pantaloni.

Possiamo allora applicare il teorema:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4}.$$

Monty Hall by Bayes

$A1$: l'auto si trova dietro alla porta 1; $C3$: il conduttore seleziona una capra dietro la porta 3.

- $P(A1) = 1/3$, probabilità a priori che l'automobile si trovi dietro la porta 1.
- $P(C3) = 1/2$, probabilità che il conduttore apra la porta 3 con dietro una capra (dal punto di vista del concorrente): deve scegliere una delle due porte non scelte dal concorrente.
- La probabilità che il conduttore selezioni una porta con dietro la capra posto che l'automobile sia dietro la porta 1, $P(C3|A1)$, è 1/2. Se l'automobile è dietro la porta 1, il conduttore può scegliere di aprire una delle altre due porte 2 o 3: per il concorrente ci sono due porte tra cui scegliere, cioè probabilità 1/2 per ognuna.

Pertanto, sfruttando il teorema di Bayes:

- la probabilità di trovare l'auto cambiando la scelta iniziale, dopo che il conduttore (onnisciente) ha mostrato una porta con dietro la capra è $2/3$:

$$P(A2|C3) = 1 - P(A1|C3) = 1 - \frac{P(C3|A1)P(A1)}{P(C3)} = 1 - \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}};$$

- oppure, considerando che $P(C3|A2) = 1$ dato che al conduttore non rimane che aprire l'unica porta non scelta dal concorrente con dietro una capra, si può calcolare direttamente:

$$P(A2|C3) = \frac{P(C3|A2)P(A2)}{P(C3)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

P(busta 2 oro | busta ap. oro) = P(scatola con 2 oro | busta ap. oro) $P(A|O)$ dove A è la scatola con due monete d'oro, e $P(A)$ è la probabilità che essa venga scelta; $P(O)$ è invece la probabilità che il la busta aperta contenga la moneta d'oro.

- $P(O|A) = 1$, la busta aperta nella scatola A è sicuramente d'oro.
- $P(A) = 1/3$, la probabilità di scegliere la scatola A è 1/3.

La moneta d'oro è in A o in B, per A la probabilità è 1, per B è 1/2:

$$P(O) = P(A) \cdot P(O|A) + P(B) \cdot P(O|B) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

allora

$$P(A|O) = \frac{P(O|A) \cdot P(A)}{P(O)} = \frac{1 \times 1/3}{1/2} = 2/3.$$

Definizione di Probabilità

1. Definizione classica
2. Definizione frequentista
3. Definizione soggettiva
4. (Definizione assiomatica)

DEFINIZIONE FREQUENTISTA - La probabilità di un evento E, per esempio l'uscita di testa nel lancio di una moneta, è il limite a cui tende il rapporto n/N dove n è il numero di teste e N è il numero di lanci totali, quando N tende all'infinito. La probabilità $p(E)$ dell'evento è il limite delle frequenze relative:

$$p(E) = \lim_{N \to +\infty} \frac{F_{oss}}{N}$$

DEFINIZIONE SOGGETTIVA - Considerato un evento E, la probabilità $p(E)$, che un soggetto attribuisce all'evento E, è un numero reale che misura il grado di fiducia che un individuo *coerente* attribuisce, secondo le sue informazioni e opinioni, all'avverarsi di E.

DEFINIZIONE ASSIOMATICA - Si definisce la misura di probabilità su uno spazio degli eventi Ω, tramite alcune proprietà *(assiomi)*.

Testiamo il calcolo per i compleanni

Ai passati Campionati Europei di calcio in Francia parteciparono 24 squadre,ciascuna formata da 23 giocatori.

Possiamo mettere alla prova il nostro modello: i giocatori sono nel numero giusto per dire che la probabilità che in una squadra due calciatori festeggino il compleanno lo stesso giorno è $\frac{1}{2}$.

La definizione frequentista mi porta a pensare che su 24 squadre, mi devo "aspettare" 12 squadre con il giorno di bi-compleanno per due calciatori. Cerchiamo su Wikipedia gli elenchi dei calciatori divisi per squadra, con indicazione della data di compleanno...

Quanto si può discostare da 12 il conteggio degli eventi favorevoli?

LA DEFINIZIONE DI VALORE ATTESO

Se un esperimento casuale dà gli esiti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rispettivamente con probabilità $p_1, p_2, \ldots, p_n$ definiamo il valore atteso dell'esperimento casuale:

$$E[x] = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n.$$

In un dado classico, ogni faccia ha punteggi da 1 a 6; il valore atteso del punteggio per il lancio di un dado e':

$$\frac{1}{6}1 + \frac{1}{6}2 + \frac{1}{6}3 + \frac{1}{6}4 + \frac{1}{6}5 + \frac{1}{6}6 = \frac{1}{6}\frac{(6 \cdot 7)}{2} = 3,5.$$

Valore atteso: lancio dei dadi

Lanciando due dadi, qual è il valore atteso? È giusto dire $2 \cdot 3,5 = 7$?

Punteggio	Casi possibili	Probabilità
2	1	$1/36$
3	2	$1/18$
4	3	$1/12$
5	4	$1/9$
6	5	$5/36$
$\rightarrow 7$	6	$1/6$
8	5	$5/36$
9	4	$1/9$
10	3	$1/12$
11	2	$1/18$
12	1	$1/36$

Casinò di Monte Carlo: la roulette

Si può vincere alla roulette?

- Nella roulette ci sono 37 numeri:$\{0, 1, 2, ..., 36\}$
- Lo 0 non ha colore mentre gli altri numeri sono metà rossi e metà neri
- Si possono fare tanti tipi di giochi
- per esempio se si punta su rosso se esce rosso si prende il doppio, se esce nero si perde quello che si è puntato
- Quanto si guadagna in media?

La roulette

Quanto posso aspettarmi di vincere alla roulette con 1 euro?

- puntando su nero in media si vince $\frac{19}{37}(-1) + \frac{18}{37}1 = -\frac{1}{37}$
- puntando su un numero si vince $\frac{1}{37}(35) + \frac{36}{37}(-1) = -\frac{1}{37}$

La “martingala” o metodo del “raddoppio” della posta funziona?

- Punto k sul rosso; se esce, intasco $2k$ e, quindi guadagno k.
- Se perdo, punto $2k$ sul rosso; se esce, intasco $4k$ e, quindi guadagno $4k - (k + 2k) = k$.
- Se perdo, punto $4k$ sul rosso; se esce, intasco $8k$ e, quindi guadagno $8k - (k + 2k + 4k) = k$.
- Ecc.; basta continuare a raddoppiare la puntata, *prima o poi il rosso esce e recupero tutto, guadagnando k.*

Il grillo parlante (alias Cacasenno)

Hmmmmm. . .

- Intanto, considera che quanto devi mettere in gioco cresce esponenzialmente: dopo 8 puntate in cui esce il nero, (e succede. . .), devo puntare $256k$ e sperare che esca rosso per non rovinarmi e guadagnare k: vale il rischio?
- Quindi, per essere sicuro di non perdere, dovresti avere un capitale infinito. **E non ce l'hai!**
- Ricorda che le case da gioco mettono limiti alle puntate: potresti addirittura non potere puntare quello che "ti serve".
- Quello che succederà, invece, è che prima o poi andrai incontro alla rovina: c'è anche un teorema al riguardo.

Teorema della rovina del giocatore

(Pascal) Due giocatori, A e B, cominciano a giocare, con la medesima dotazione di fondi, una serie di scommesse di posta unitaria con probabilità costante p di vincita (perdita) per A (B) [e, quindi di vincita $q = 1 - p$ per B]. Il **"gioco"** termina quando uno dei due è rovinato. Qual è la probabilità che ciò avvenga in n colpi?

(Bernoulli remix, 1713) Sia a la dotazione di A e b la dotazione di B. La probabilità di rovina di B è

$$\begin{cases} R(a,b,p) = \frac{p^{a+b} - p^a q^b}{p^{a+b} - q^{a+b}} & \text{se } a \neq b,\ p \neq 1/2, \\ R(a,a,p) = \frac{p^a}{p^a + q^a} & \text{se } a = b,\ p \neq 1/2 \\ R(a,b,1/2) = \frac{a}{a+b} & \text{se } a \neq b,\ p = 1/2. \end{cases}$$

Se a è molto grande (A molto ricco), ossia $a \to \infty$, la probabilità di rovina di b tende a 1 (è certa la rovina asintotica di B).

Tiriamo sassi in uno stagno

- Mentre ci riposiamo all'ombra di una quercia in estate, inganniamo il tempo (abbiamo finito il nostro libro...) tirando sassi in uno stagno. Lo stagno non è vicino e ci chiediamo quale sia la probabilità di fare centro.
- Proviamo a tirare sassi in una piccola pozza: i nostri sassi cadono all'incirca in un raggio di 10 m (siamo scarsi). Qual è la probabilità di centrare la pozza al suo interno?

Ci stiamo divertendo...

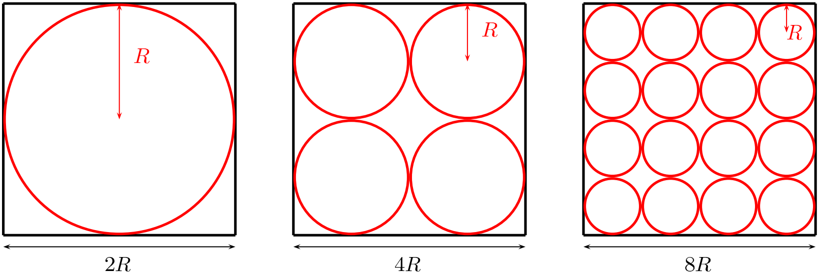
Andiamo allo stadio (di notte, quando è vuoto) e ci mettiamo con uno sparapatate sugli spalti e tiriamo al campo. Lanciamo 1748 patate (ho detto che ci stavamo divertendo...).

La mattina dopo vediamo sul giornale una foto dall'alto, e osserviamo che il campo (105 m $\times$ 68 m) è coperto di patate più o meno in modo omogeneo.

Quante ce ne aspettiamo nell'area di rigore di casa ($16,50$ m $\times$ $40,32$ m)?

Quante nel cerchio di centrocampo (raggio pari a $9,15$ m)?

La definizione frequentista ci porta a pensare che la probabilità di "fare centro" è il rapporto fra l'**area utile** e l'**area totale** ricoperta. Proviamo un cerchio in un quadrato...



$$\frac{A_C}{A_Q} = \frac{\pi R^2}{(2R)^2} = \frac{4 \times \pi R^2}{(4R)^2} = \frac{16 \times \pi R^2}{(8R)^2} = \frac{\pi}{4}$$