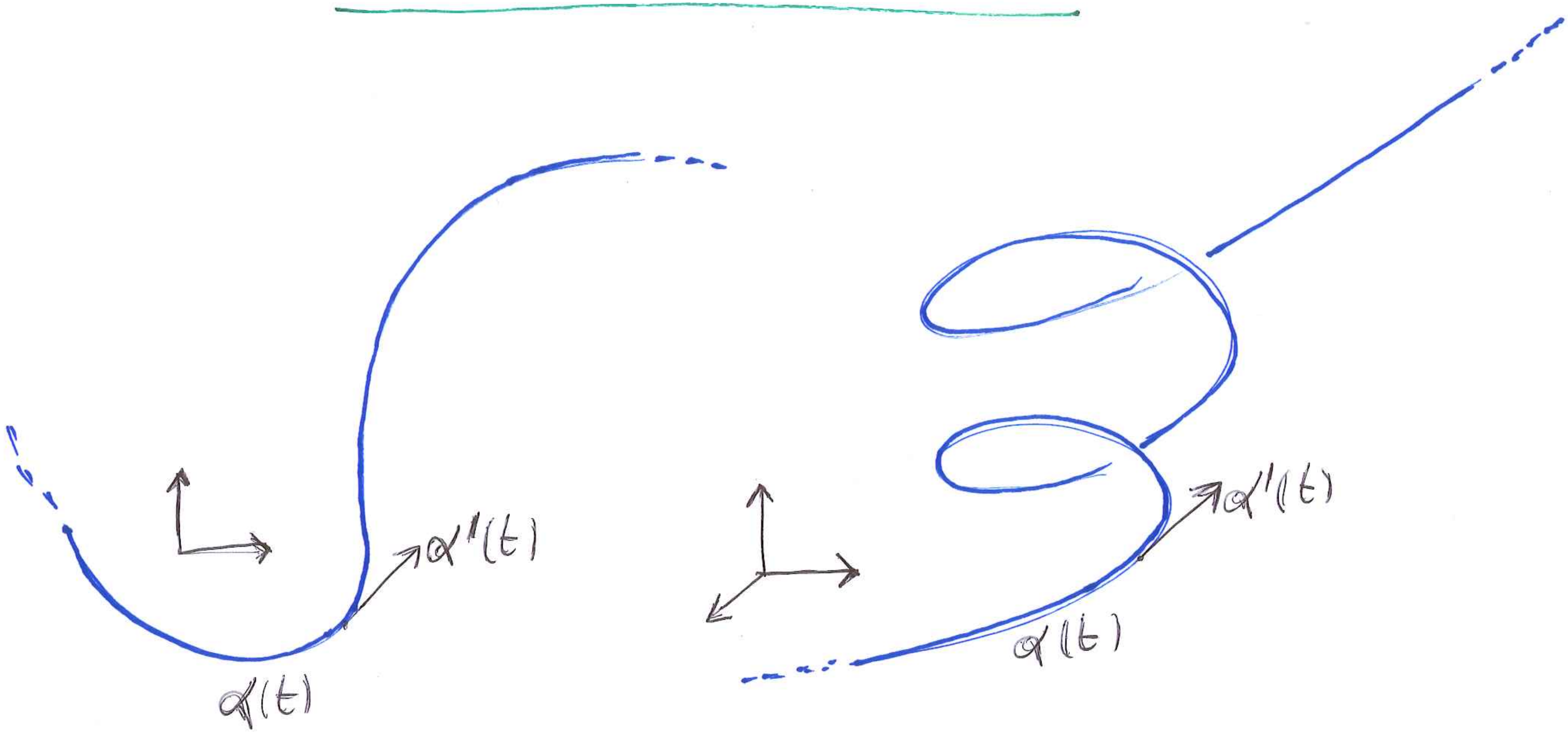
GEOMETRIE DI GAUSS E DI RIEMANN

Jacopo Stoppa www-dimat.unipv.it/stoppa

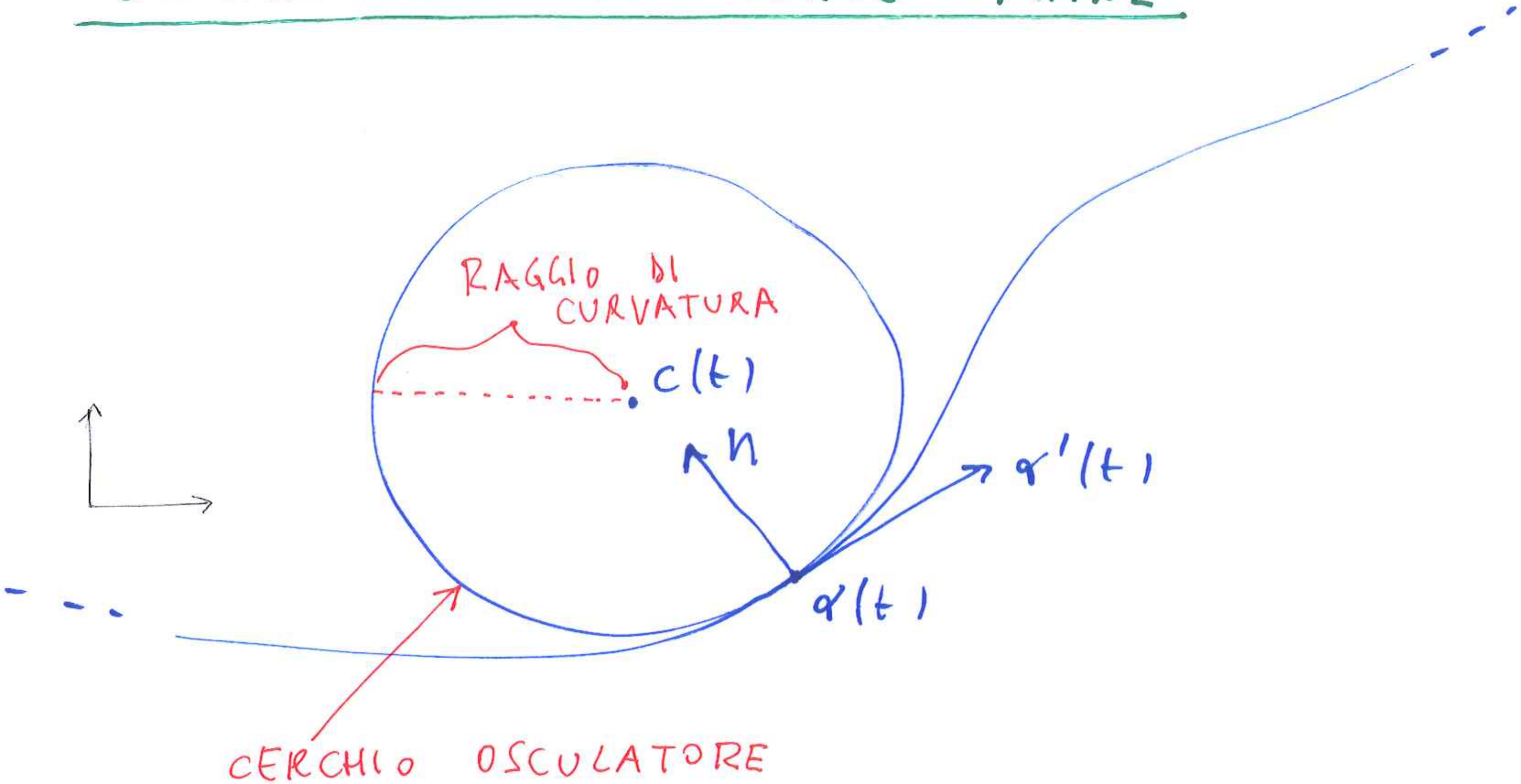
CURVE IN $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$



VELOCITÀ : $\alpha'(t)$ VELOCITÀ SCALARE : $|\alpha'(t)|$

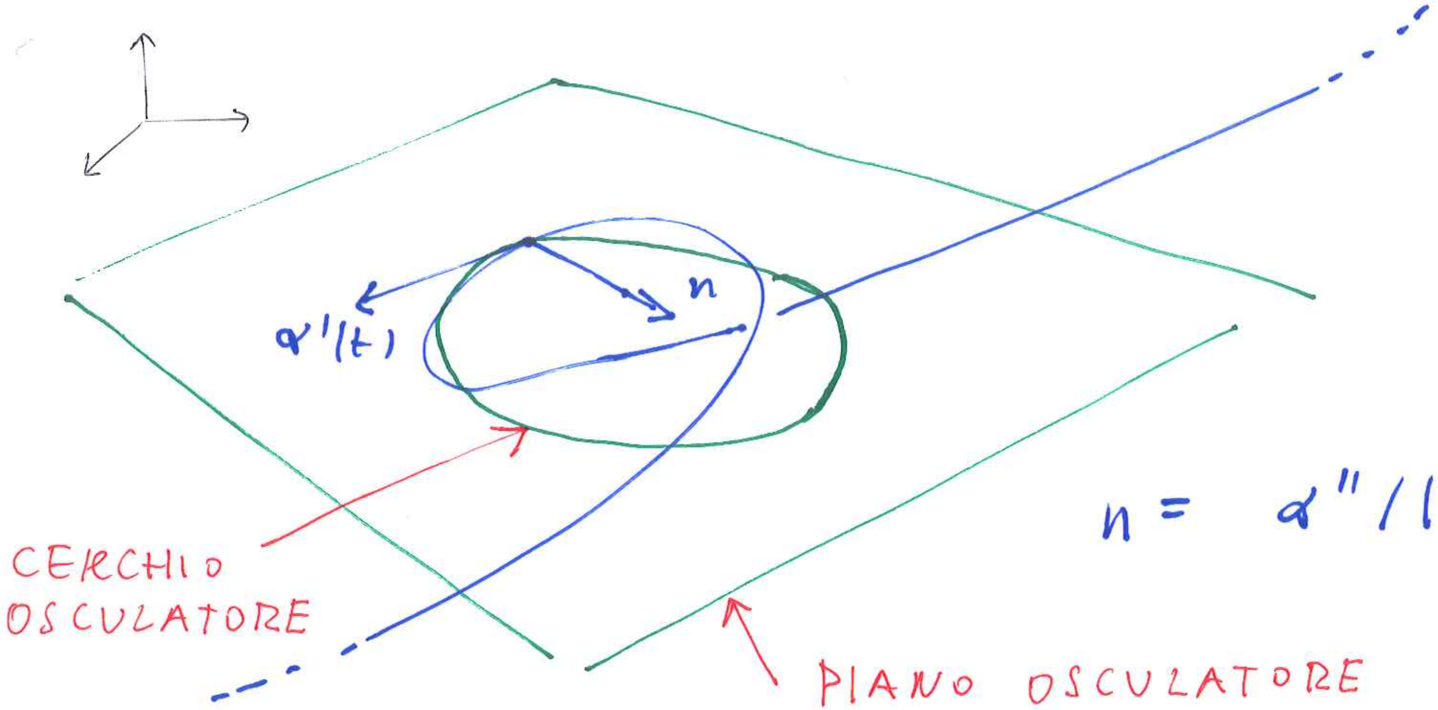
OGNI CURVA PUÒ ESSERE PERCORSA CON VELOCITÀ SCALARE COSTANTE ($= 1$).

CURVATURA DI CURVE PIANE



CURVATURA K $\begin{cases} \text{MODULO} = 1 / (\text{RAGGIO DI CURVATURA}) \\ \text{SEGNO} + \text{SE } n \text{ PUNTA DENTRO IL CERCHIO.} \end{cases}$

CURVATURA DI CURVE $\subset \mathbb{R}^3$

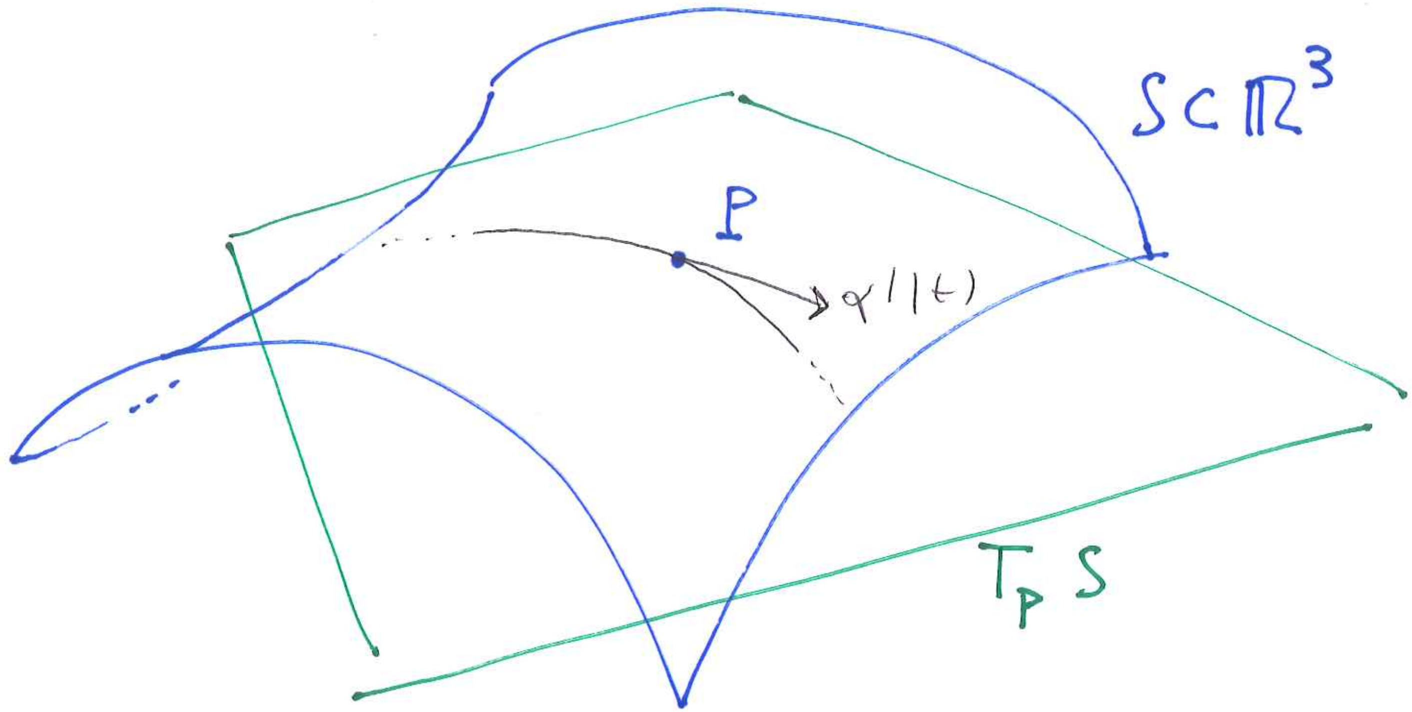


$n = \alpha'' / |\alpha''|$

$|K| = 1 /$ (RAGGIO DEL CERCHIO OSCULATORE)

N. B. : K, "TORSIONE" SONO GLI INVARIANTI PER ISOMETRIA

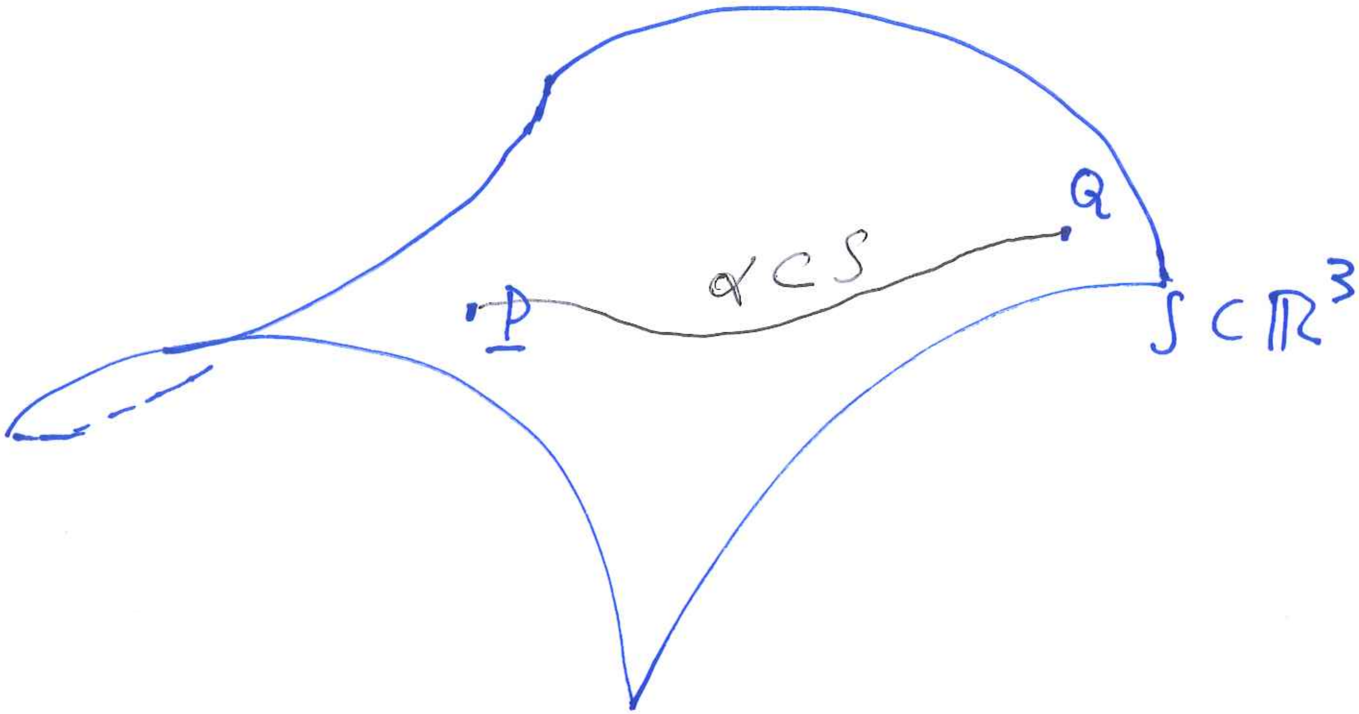
SUPERFICI NELLO SPAZIO : I^a FORMA FONDAMENTALE (METRICA)



PIANO TANGENTE $T_P S = \{$ I VETTORI TANGENTI A TUTTE LE CURVE PASSANTI PER P E CONTENUTE IN $S \}$.

I^a FORMA FONDAMENTALE (METRICA)
$$g(v, w) = |v| |w| \cos\vartheta$$
PER v, w VETTORI NEL PIANO TANGENTE.

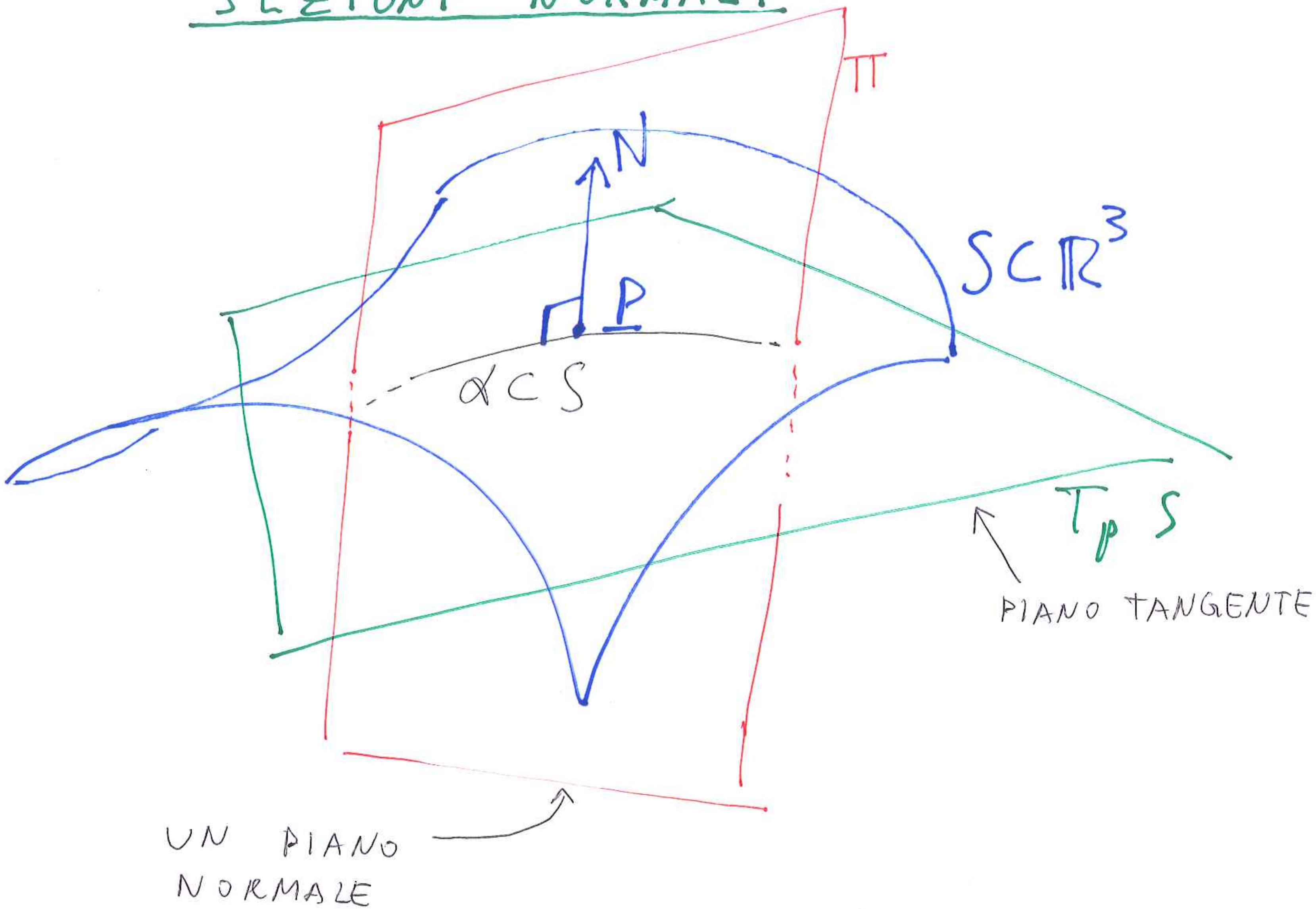
DISTANZA INTRINSECA



$d(P,Q) =$ LA MINIMA LUNGHEZZA DI UNA CURVA $\alpha \subset S$ DA P A Q.

LA I^a FORMA (METRICA) g DETERMINA COMPLETAMENTE LA DISTANZA INTRINSECA.

SEZIONI NORMALI



$\alpha = \pi \cap S =$ SEZIONE NORMALE.

CURVATURE NORMALI

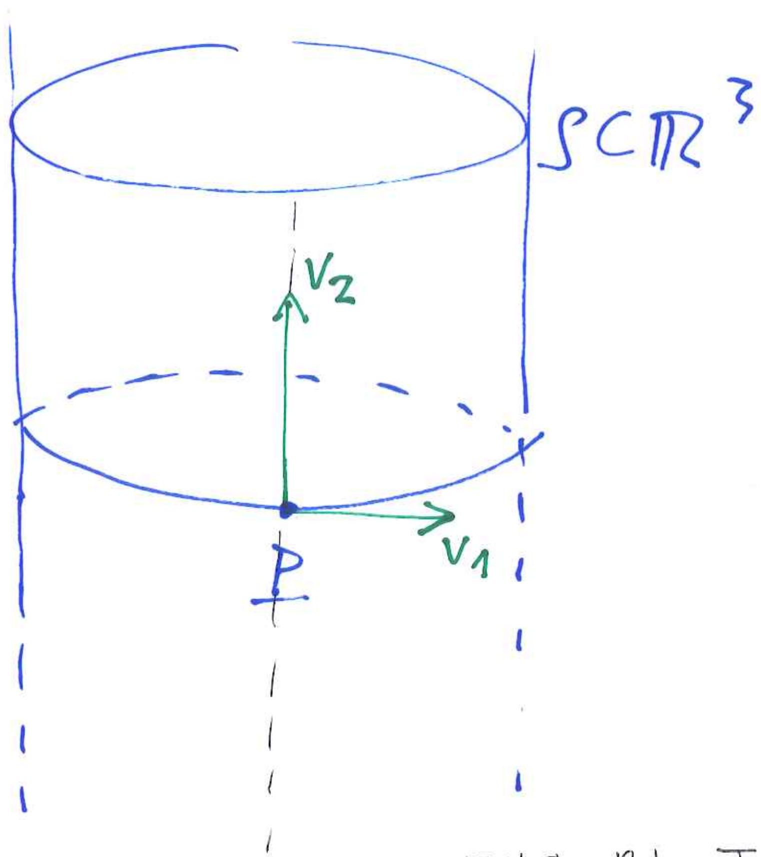
$S \subset \mathbb{R}^3$, $P \in S$.

v = VETTORE TANGENTE A S IN P
$|v| = 1$

$K(v) =$ LA CURVATURA DI UNA SEZIONE NORMALE IN P CON TANGENTE v

SEGNO: $\begin{cases} + & \text{SE CERCHIO OSCULATORE CONTIENE } N \\ - & \text{ALTRIMENTI.} \end{cases}$

DIREZIONI PRINCIPALI & CURVATURE PRINCIPALI



DIREZIONI PRINCIPALI : VETTORI TANGENTI v TALI CHE $K(v)$ È MASSIMA O MINIMA

CURVATURE PRINCIPALI : I VALORI DI $K(v)$ NELLE DIREZIONI PRINCIPALI.

CURVATURE PRINCIPALI

TEOREMA

- CI SONO 2 DIREZIONI PRINCIPALI DISTINTE, ORTOGONALI TRA LORO, OPPURE
- TUTTE LE DIREZIONI SONO PRINCIPALI ("PUNTO OMBELICALE")

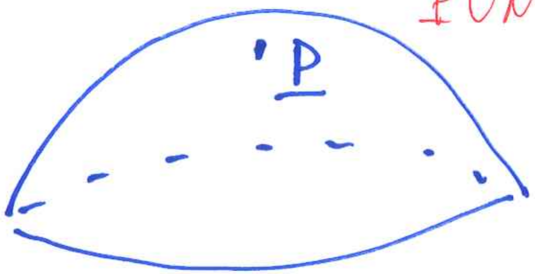
CURVATURA GAUSSIANA

$S \subset \mathbb{R}^3$, $P \in S$

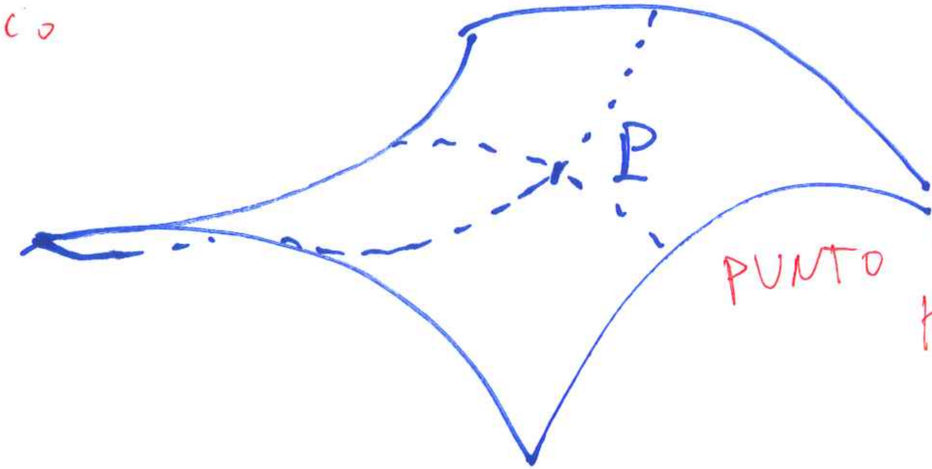
k_1, k_2 = CURVATURE PRINCIPALI

$$K = k_1 k_2$$

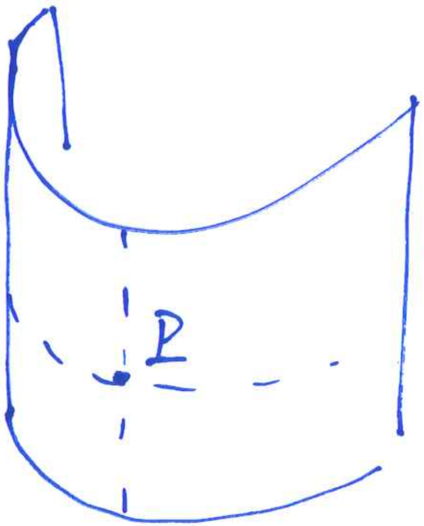
= CURVATURA GAUSSIANA.



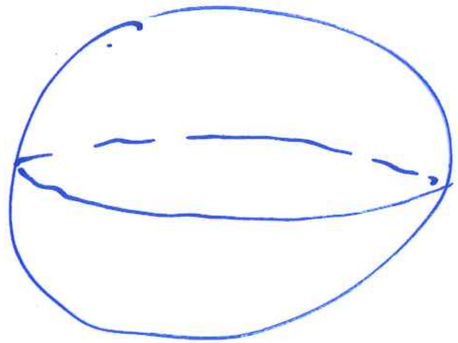
PUNTO ELLITTICO
$K > 0$



PUNTO IPERBOLICO
$K < 0$

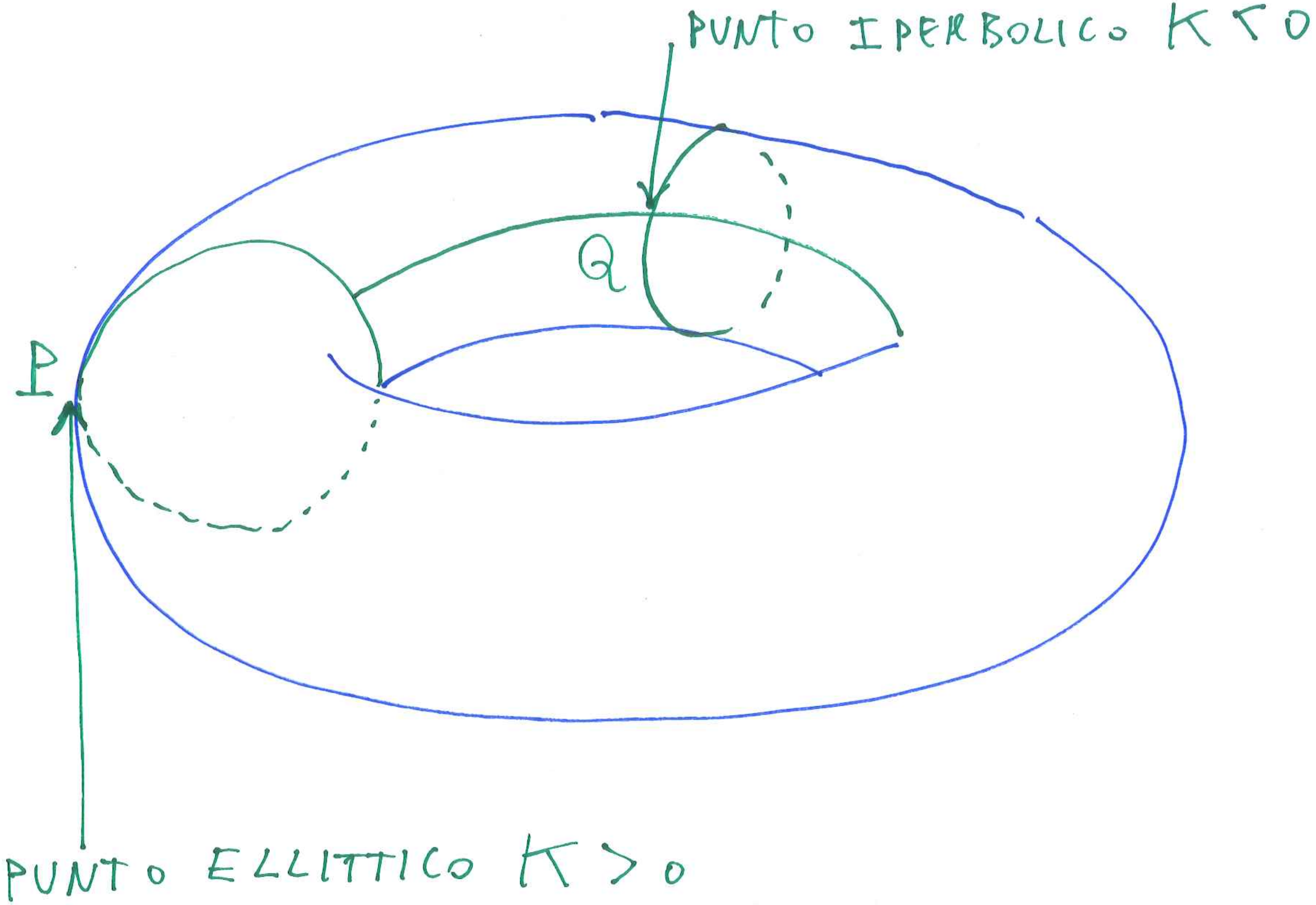


PUNTO PARABOLICO
$K = 0$



TUTTI I PUNTI SONO OMBELICALI

MO


PUNTO IPERBOLICO K < 0
Q
P
PUNTO ELLITTICO K > 0

CURVATURA GAUSSIANA

- $S \subset \mathbb{R}^3$ "COMPATTA, CONNESSA, ORIENTABILE" CON $K > 0$ OVUNQUE $\Rightarrow$ S SI PUÒ DEFORMARE IN UNA SFERA.

- SE $S \subset \mathbb{R}^3$ HA SOLO PUNTI OMBELICALI $\Rightarrow$ È UNA SFERA.

- $S \subset \mathbb{R}^3$ "COMPATTA" $\Rightarrow$ $K > 0$ IN ALMENO UN PUNTO.

- S "COMPATTA": SENZA BORDO E LIMITATA (ES: SFERA, CIAMBELLA)
- S "CONNESSA": HA UN SOLO PEZZO.
- S "ORIENTABILE": HA UN VETTORE NORMALE DEFINITO IN MODO COERENTE.

THEOREMA EGREGIUM

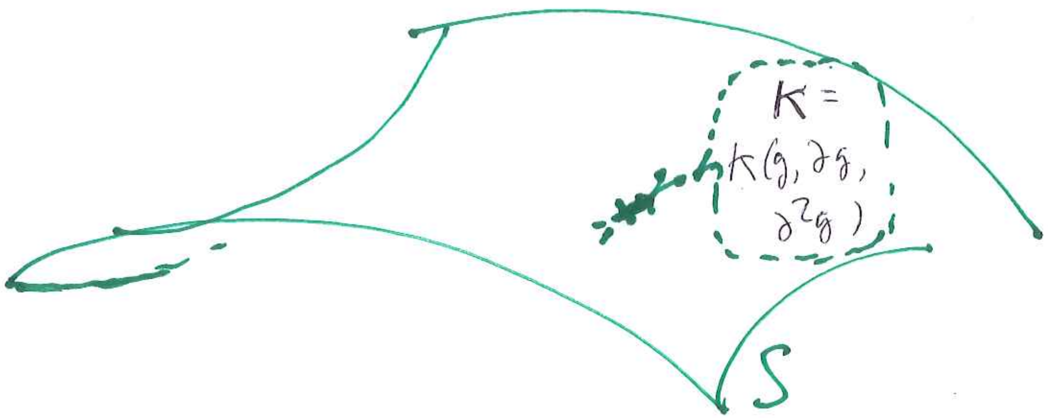
("FORMULA EGREGIA")

GAUSS: LA CURVATURA GAUSSIANA DIPENDE SOLO DALLA METRICA g (I^a FORMA).

OVVERO: ESISTE UNA FORMULA PER $K(P)$ IN FUNZIONE DI $g(P)$, $\partial g(P)$, $\partial^2 g(P)$.

OVVERO: UNA FORMICA INTELLIGENTE CHE VIVE SU S PUÒ CALCOLARNE LA CURVATURA K!

(QUESTO È COMPLETAMENTE <u>FALSO</u> PER LE CURVATURE PRINCIPALI)



"RIVOLUZIONE RIEMANNIANA".

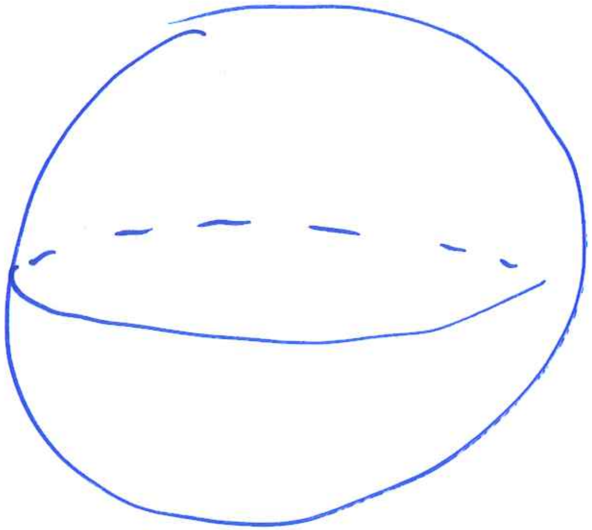
SI PUÒ PRENDERE COME OGGETTO FONDAMENTALE $\underline{\underline{g}}$, NON IL MODO PARTICOLARE IN CUI $S \subset \mathbb{R}^3$.

1) PENSIAMO A S IN ASTRATTO, NON IMMERSA IN $\mathbb{R}^3$, BASTA CHE SIA BEN DEFINITO UN "PIANO TANGENTE" IN OGNI PUNTO ("SUPERFICIE DIFFERENZIABILE")

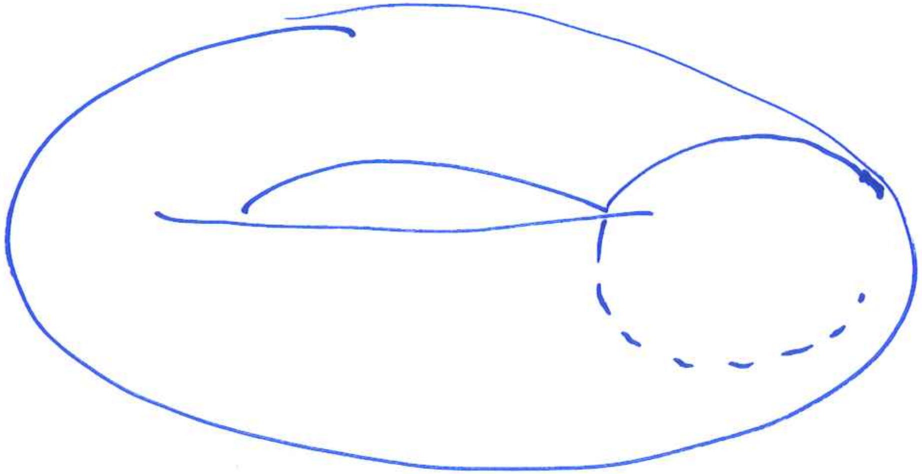
2) PRESCRIVIAMO g ARBITRARIAMENTE, BASTA CHE SIA "BILINEARE, SIMMETRICA, POSITIVA"

queste ipotesi si possono rilassare ottenendo nuove geometrie

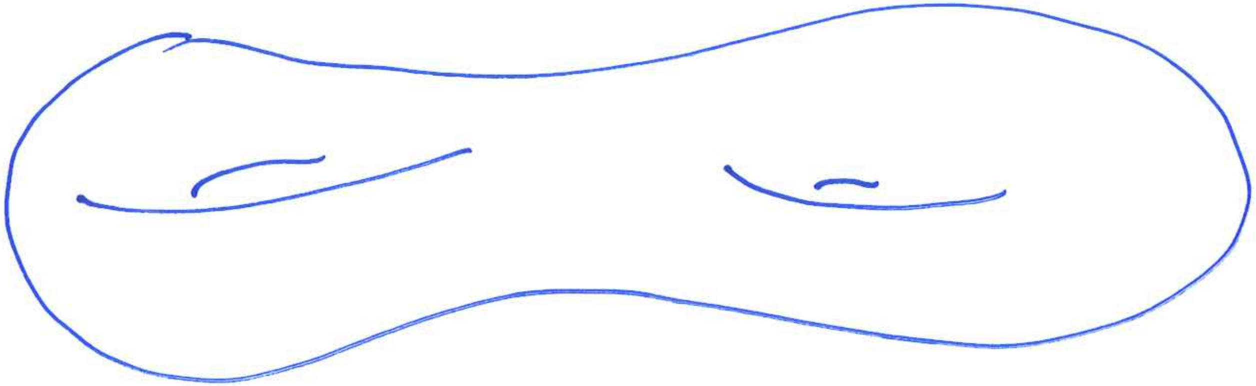
SUPERFICI ASTRATTE COMPATTE, CONNESSE, ORIENTABILI



SFERA



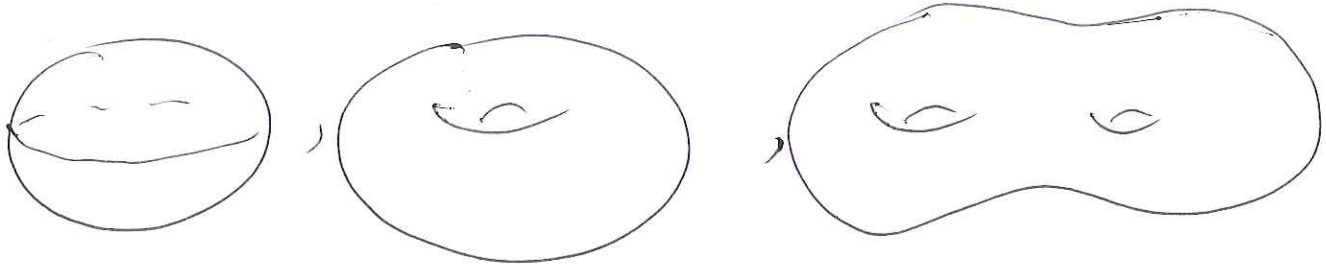
CIAMBELLA = TORO



BITORO

PLURITORO

FORMULA DI GAUSS-BONNET

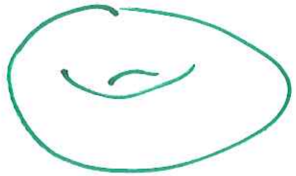
$S =$  $, \ldots$

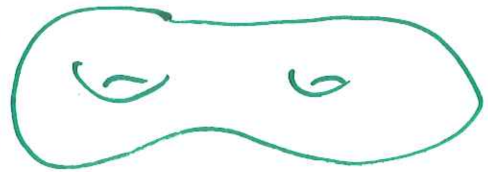
PER OGNI POSSIBILE SCELTA DI g SU S, SI HA

CURVATURA GAUSSIANA TOTALE $= 2\pi\,(2 - 2\,\#\text{BUCHI})$.

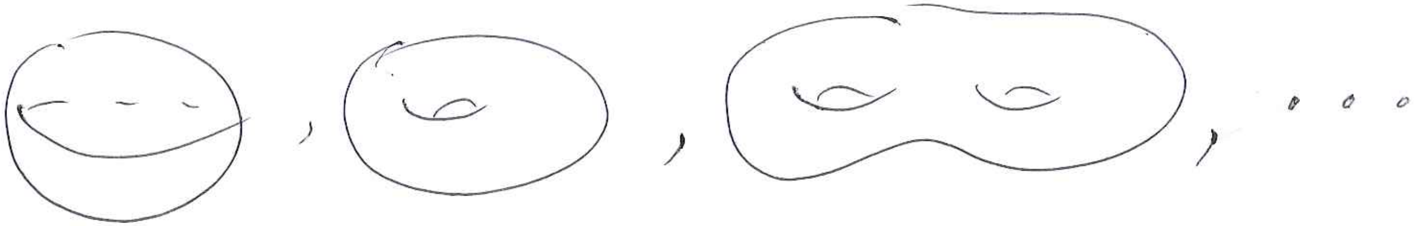
ESEMPI:

K TOT. () $= 4\pi$.

K TOT. () $= 0$.

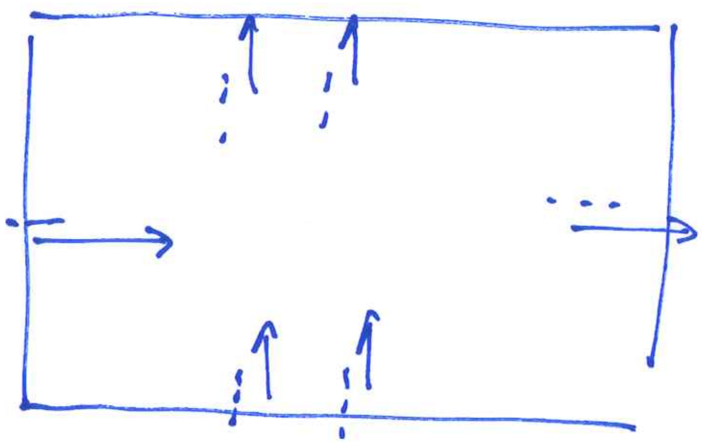
K TOT () $= -4\pi$.

UNIFORMIZZAZIONE

S = 

TEOREMA : ESISTONO (IN GENERE MOLTE) METRICHE g SU S CHE HANNO CURVATURA GAUSSIANA COSTANTE SU TUTTA S.

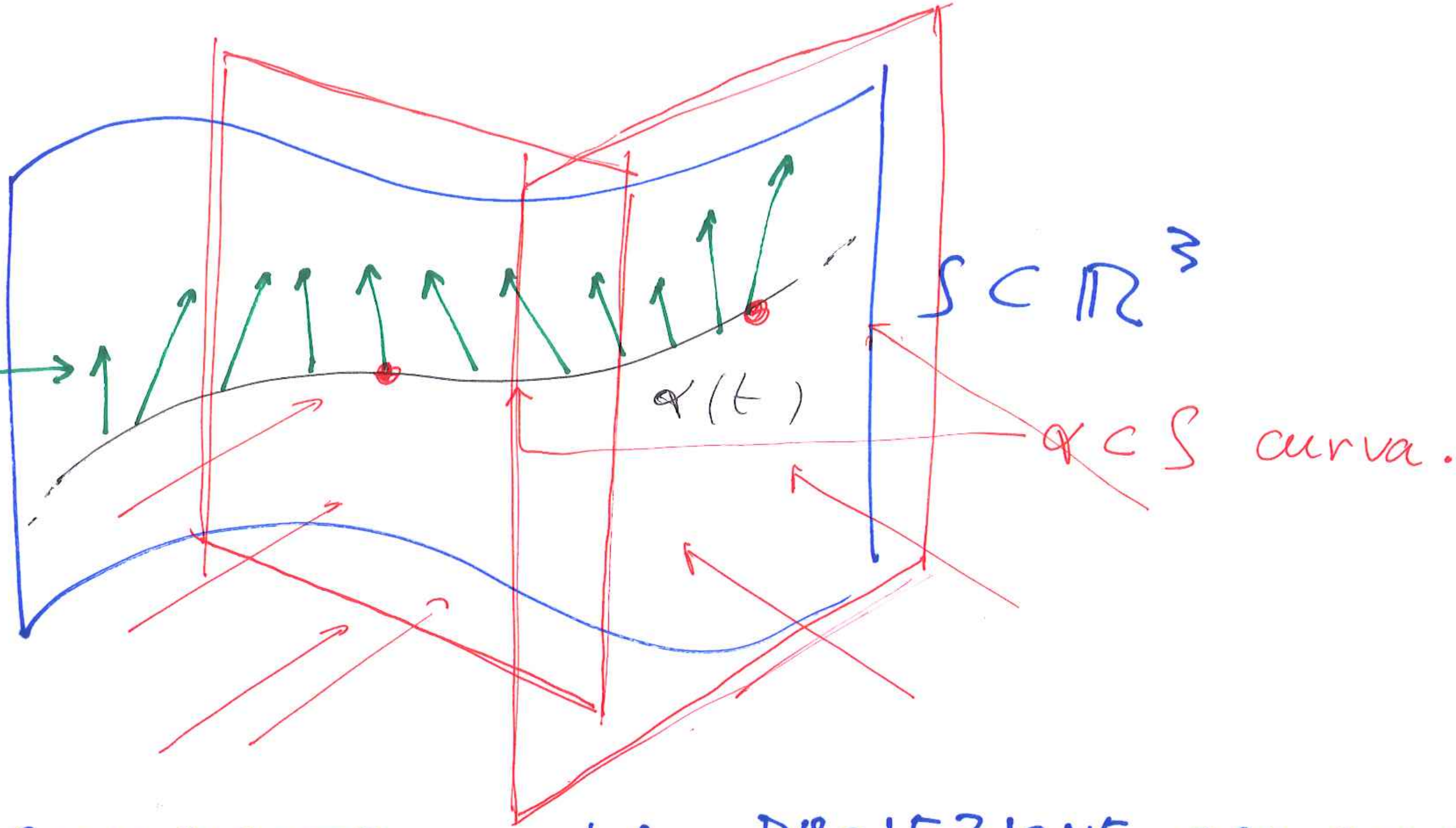
OSSERVAZIONE: PER $S \neq$ , QUESTE METRICHE <u>NON</u> POSSONO GIACERE IN $\mathbb{R}^3$ (DEVONO ESSERE "ASTRATTE")



UN TORO PIATTO. (SNAKE)

ANCORA $S \subset \mathbb{R}^3$: DERIVATE COVARIANTI

$V =$ CAMPO DI VETTORI LUNGO $\alpha \subset S$. (TANGENTI A S)



DERIVATA COVARIANTE DI V LUNGO α $\|$ "$D_{\alpha'} V$" : LA PROIEZIONE ORTOGONALE SU S DI $\frac{dV}{dt}$ CALCOLATA LUNGO α.

(N. B. $\frac{dV}{dt} \approx \frac{V(\alpha(t+\Delta t)) - V(\alpha(t))}{\Delta t}$ NON È TANGENTE A S!)

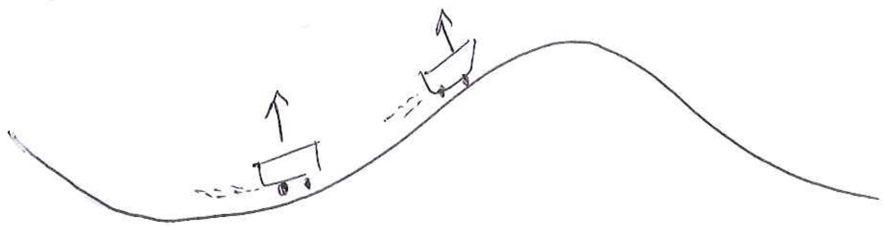
CAMPI PARALLELI E GEODETICHE

$S \subset \mathbb{R}^3$, $\alpha \subset S$ CURVA

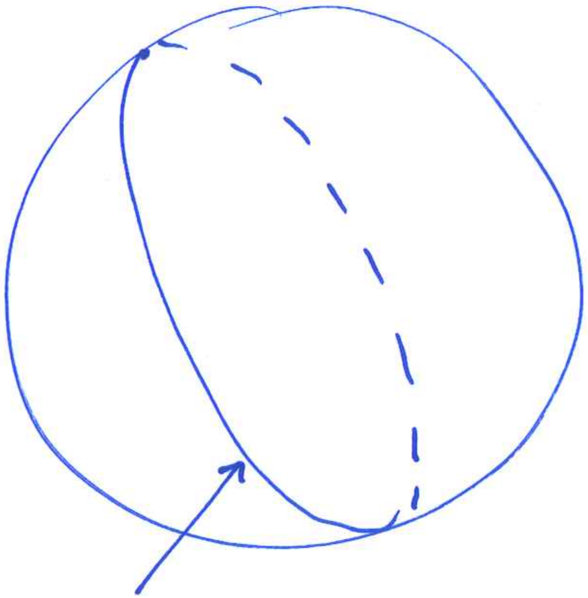
V LUNGO α È PARALLELO SE $D_{\alpha'} V = 0$

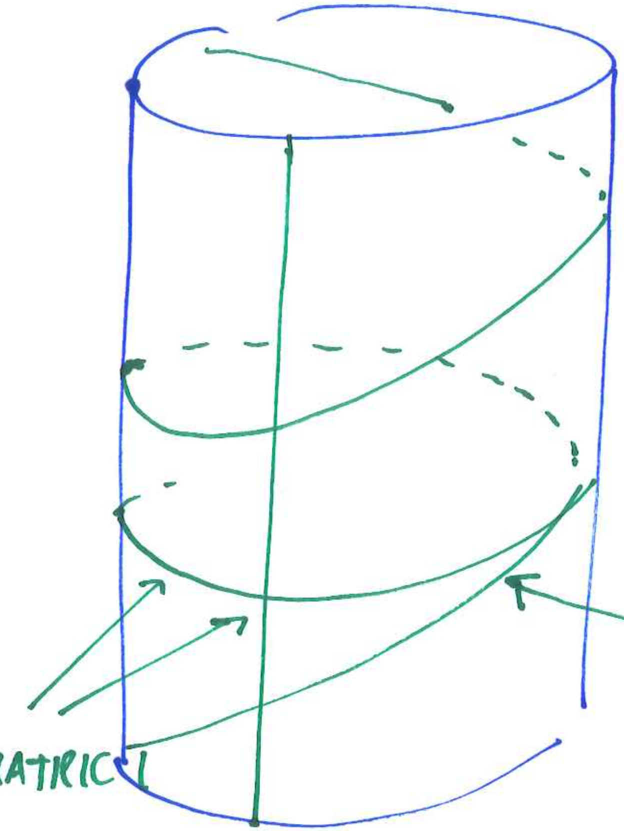
CIOÈ LA COMPONENTE LUNGO S DELLA SUA VARIAZIONE LUNGO α È NULLA.

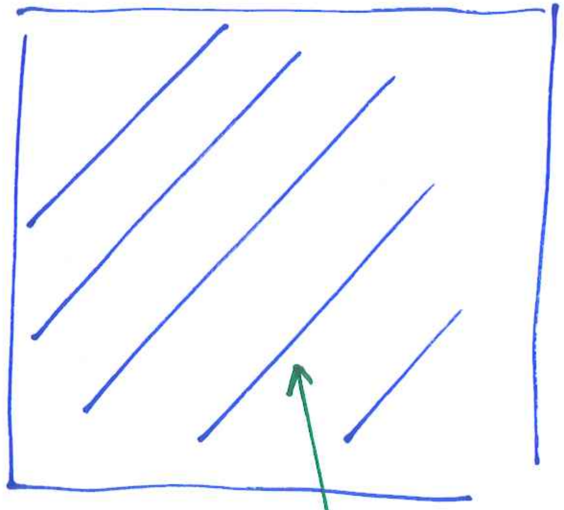
$\alpha(t) \subset S$ È UNA CURVA GEODETICA SE IL SUO CAMPO DI VETTORI VELOCITÀ $\alpha'(t)$ È PARALLELO, OVVERO: L'ACCELERAZIONE LUNGO α È NORMALE A S.

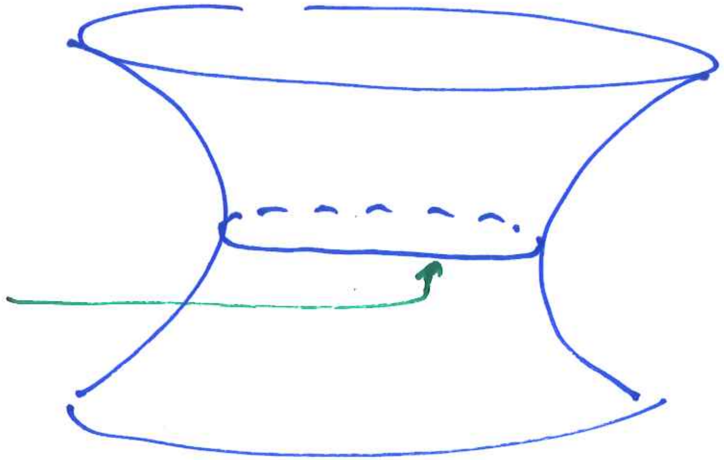


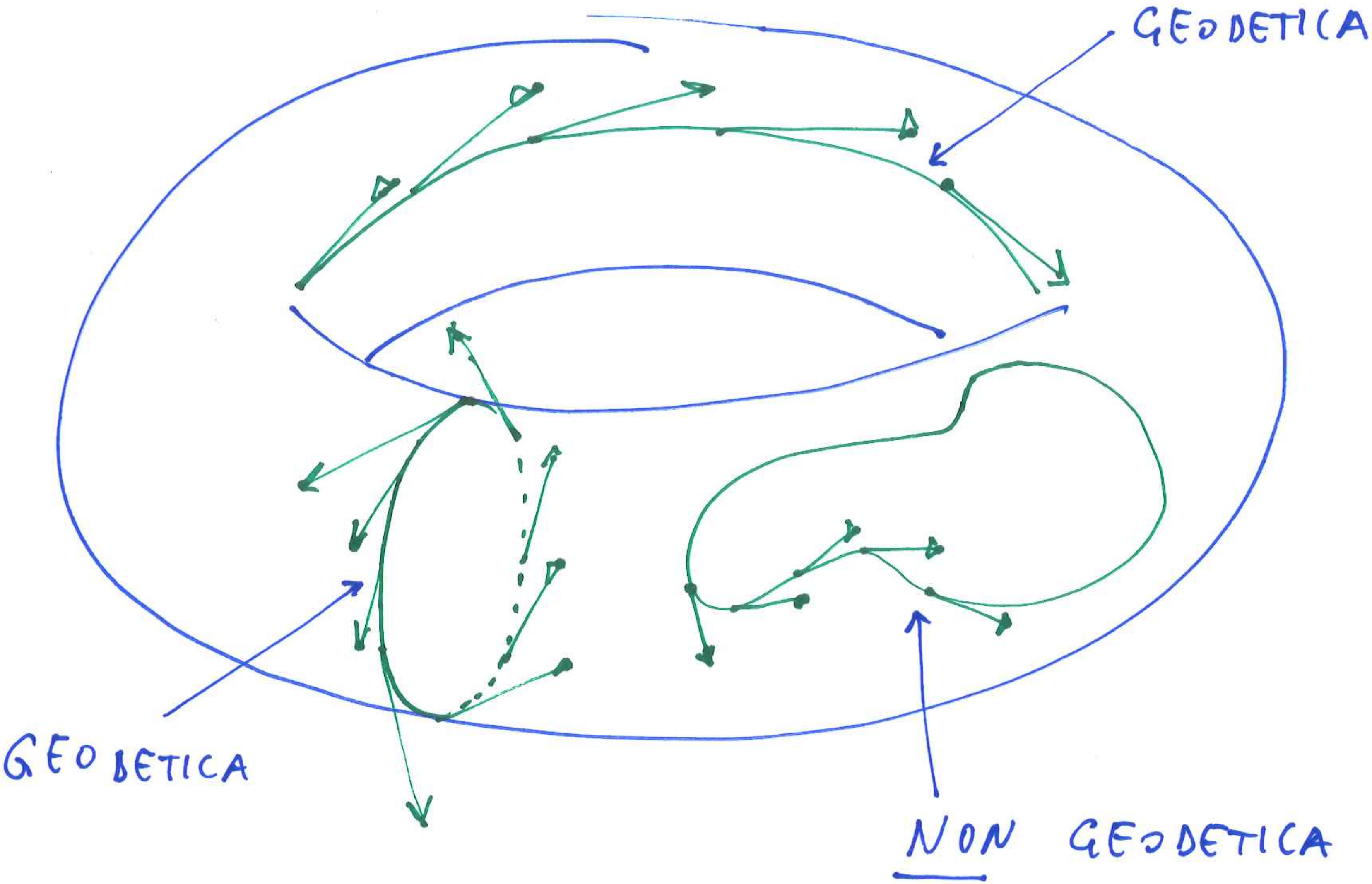
GEODETICHE


CERCHI MASSIMI


GENERATRICI
ELICHE.


$\mathbb{R}^2$
RETTE


SUP. DI ROTAZIONE
GEODETICA


GEODETICA
GEODETICA
NON GEODETICA

THEOREMA EGREGIUM REDUX

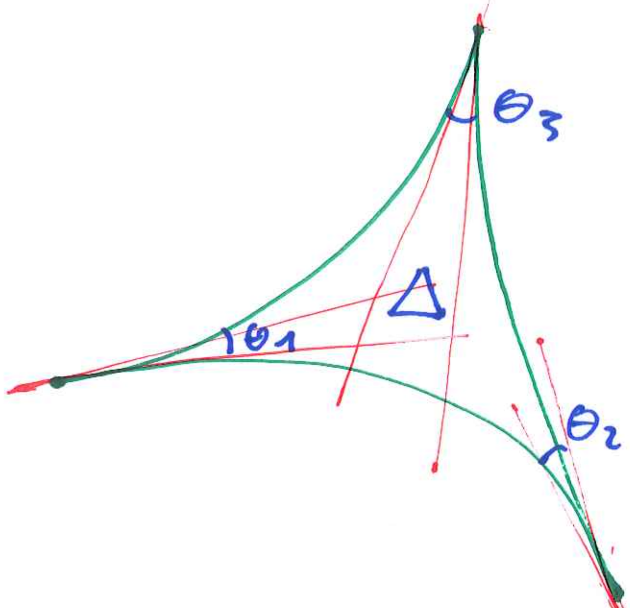
GAUSS : 1) QUALUNQUE DERIVATA COVARIANTE DIPENDE SOLO DA g, OVVERO: ESISTE UNA FORMULA PER $D_{\alpha'} V$ IN FUNZIONE DI g e ∂g

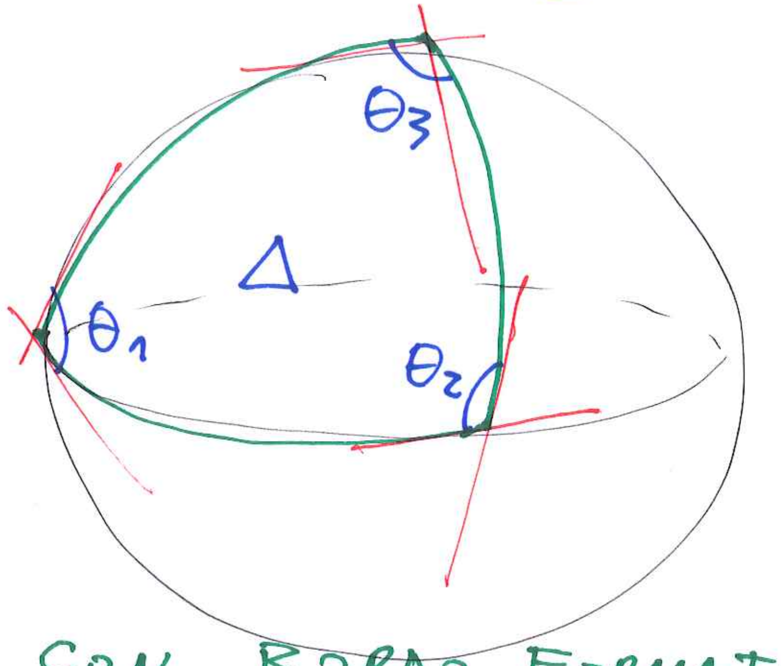
2) LA CURVATURA GAUSSIANA DI S È COMPLETAMENTE DETERMINATA DALLE DERIVATE COVARIANTI.

UNA FORMICA INTELLIGENTE CHE VIVE SU S RIESCE A CALCOLARE LA COMPONENTE LUNGO S DELLE VARIAZIONI DEI CAMPI TANGENTI, E USANDO SOLO QUESTE DETERMINA LA CURVATURA K.

GAUSS-BONNET REDUX

.... PERTANTO HA SENSO PARLARE DI GEODETICHE SU S = UNA SUPERFICIE ANCHE <u>ASTRATTA</u>





Δ = TRIANGOLO CON BORDO FORMATO DA GEODETICHE

$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$ + CURVATURA GAUSSIANA TOTALE DI Δ.

$> \pi$ se $K > 0$ $\qquad$ $< \pi$ se $K < 0$

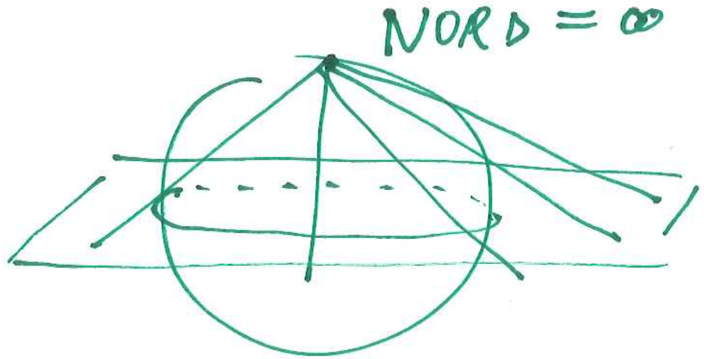
DIMENSIONE > 2

RIEMANN: PERCHÈ LIMITARSI A SUPERFICI ASTRATTE S?

M = "VARIETÀ DIFFERENZIABILE DI DIM $= n$"
$\approx$ ESISTONO COORDINATE LOCALI, E HA SENSO PARLARE DELLO <u>SPAZIO</u> DEI VETTORI TANGENTI IN OGNI PUNTO.

ESEMPIO:

- SFERA $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$



- SFERA $S^3 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ NELLO STESSO MODO.

  SPAZI TANGENTI $\approx \mathbb{R}^3$.

METRICHE E GEODETICHE IN DIM ≥ 2

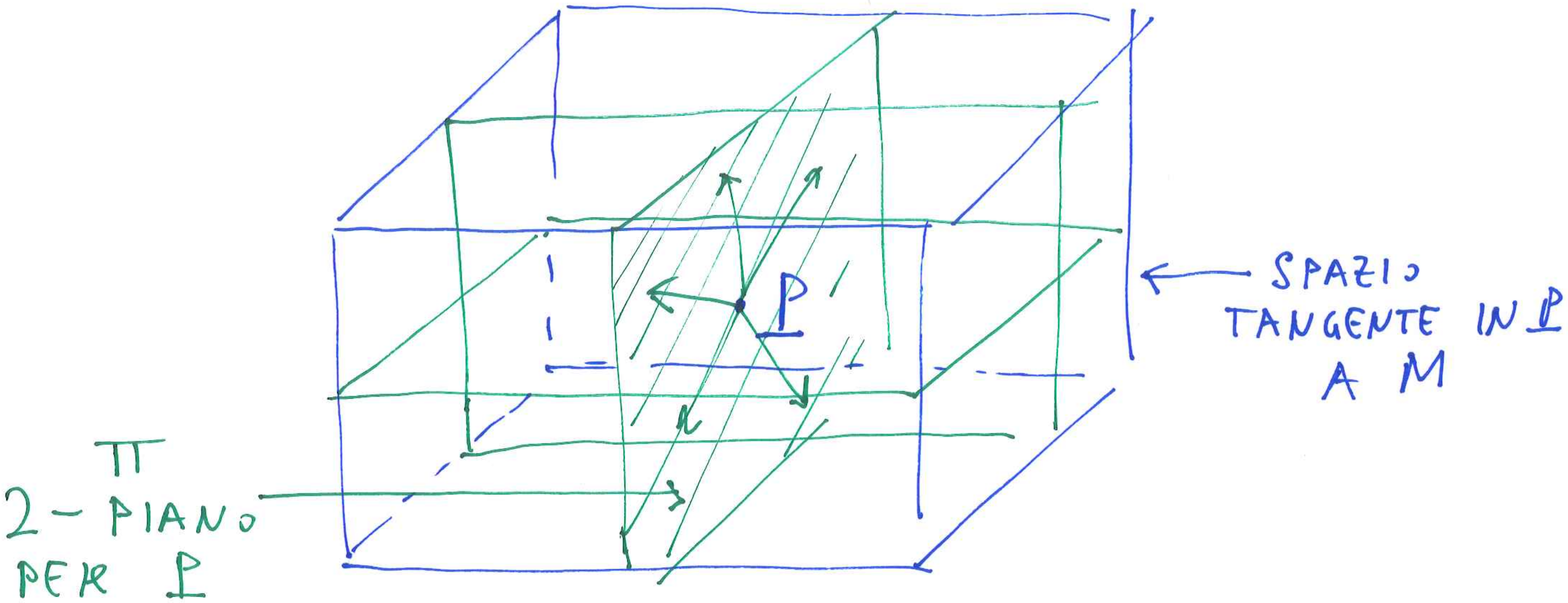
1) PRESCRIVO $g(V, W)$ "BILINEARE, SIMM., POSITIVA" PER TUTTI I VETTORI TANGENTI;

2) **DEFINISCO** LE "DERIVATE COVARIANTI" RICOPIANDO VERBATIM **LA** "FORMULA EGREGIA" DI GAUSS CHE DA $D_{\alpha'} V$ IN FUNZIONE SOLO DI $g, \partial g$.

$\boxed{\text{"CONNESSIONE DI LEVI-CIVITA"}}$

IN PARTICOLARE HA SENSO PARLARE DI GEODETICHE, CURVE $\alpha(t)$ CON $\alpha'(t)$ PARALLELO.

CURVATURE SEZIONALI



$S(\pi)$ = UNIONE DI TUTTE LE GEODETICHE CHE SI PROPAGANO DA P LUNGO π

CURV. SEZIONALE (π) = LA CURVATURA GAUSSIANA DI S(π) NEL PUNTO P.

TENSORE DI RIEMANN & CURVATURA DI RICCI

Π = 2-PIANO $\subset T_pM$, GIACITURA V, W

<u>RIEMANN</u>: CURV. SEZ. $(\Pi) = \underbrace{\langle R(V,W)W, V\rangle}_{\text{"TENSORE A 4 COMPONENTI"}}$

OVVERO: TUTTE LE CURVATURE SEZIONALI SI "INCOLLANO" IN UN UNICO OGGETTO, IL TENSORE DI RIEMANN, CHE DIPENDE SOLO DA g E LE SUE DERIVATE IN P. (E DAI CAMPI V, W <u>IN P</u>)

<u>RICCI</u>: $\boxed{Ric(V,V) = \text{LA CURVATURA SEZIONALE MEDIA SU TUTTI I PIANI CHE CONTENGONO } V.}$

L'EQUAZIONE $Ric = 0$.

<u>Problema:</u> trovare (M, g) tale che

1) le curvature sezionali NON sono tutte nulle, ma

2) $Ric(V,V)$ È IDENTICAMENTE NULLO SU M PER OGNI V.

SE M È "COMPATTA" È ESTREMAMENTE DIFFICILE! (TEOREMA DI YAU 1978).

L'EQUAZIONE $Ric = 0$ IN $\mathbb{R}^4$

Gibbons - Hawking : $Ric = 0$ in $\mathbb{R}^4$
$\approx$ "equazioni dell'elettromagnetismo" in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\}$.

1) Campo di gauge $U(1)$ su $\mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\}$
$= A$ ("potenziale")

2) Intensità del campo:

$$F(A) \approx \nabla \Big(\underbrace{\mathrm{Cost} + \frac{1}{4\pi \, |x|}}_{V(|x|)} \Big)$$

$$\Rightarrow \quad g = V(|x|)\, dx^2 + \frac{1}{V(|x|)} A^2$$

SI ESTENDE A UNA SOLUZIONE DI $Ric = 0$ SU $\mathbb{R}^4$, CON CURVATURA SEZIONALE $\neq 0$ IN OGNI PUNTO!