Corso di Geometria 2 - a.a. 2014-2015
Prova scritta del 6 luglio 2015

Svolgere in modo completo i tre seguenti esercizi.

1. (10 punti). Siano X il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ |x|+|y|+|z| \geq 1 \end{cases},$$

e $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la superficie sferica con centro $O(0,0,0)$ e raggio 1.

   (a) Stabilire se X è un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^3$;
   (b) verificare che $S^2 \subset X$;
   (c) stabilire se X è conesso per archi;
   (d) stabilire se X è semplicemente connesso.

2. (10 punti). Siano $r, a > 0$ parametri positivi con $a > r$. Sia $S(a,r) \subset \mathbb{R}^3$ la superficie regolare ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva contenuta nel piano y, z di equazione $(y-a)^2 + z^2 = r^2$.

   (a) Fissati r, a, calcolare i valori massimo e minimo della curvatura Gaussiana K di $S(a,r)$, e i relativi punti di massimo e minimo.
   (b) Discutere se due superficie $S(a,r)$ e $S(a',r')$ con $(a,r) \neq (a',r')$ possono essere isometriche.
   (c) Calcolare

$$\int_{S(a,r)} K ds.$$

3. (10 punti). Sia $N = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$, $\pi_N : S^2 \setminus N \to \mathbb{R}^2$ la carta sulla sfera unitaria S^2 data dalla proiezione stereografica da N. Si consideri il campo vettoriale v su $S^2 \setminus N$ espresso **nelle coordinate locali** $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ **della carta** π_N da

$$\frac{\partial}{\partial x}.$$

   (a) Dimostrare che v si estende a un campo vettoriale V di classe C^∞ definito su tutta la sfera S^2.

(b) Dimostrare che si ha $V(N) = 0$.

(c) Calcolare l'indice di V nel punto N.

(d) Si consideri il campo vettoriale w su $S^2 \setminus N$ espresso **nelle coordinate locali** $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ **della carta** π_N da

$$x \frac{\partial}{\partial x}.$$

Discutere se w si estende a un campo vettoriale C^∞ definito su tutta la sfera S^2.