Corso di Geometria 2 - a.a. 2014-2015

Prova scritta del 15 giugno 2015

Svolgere in modo completo i tre seguenti esercizi.

1. Considerati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = x - z = z - t = 0\},$$
$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = 0\}$$

sia $X = \mathbb{R}^4 \setminus U$.

   (a) Verificare che $H \setminus \mathbf{0}$ è un retratto di deformazione di X;
   (b) stabilire se X è connesso per archi;
   (c) determinare $\pi_1(X, p)$, dove $p = (1, 0, 0, 0)$;
   (d) stabilire se X è semplicemente connesso.

2. Sia $Sp(n, \mathbb{R}) \subset GL(2n, \mathbb{R})$ il sottogruppo formato dalle matrici invertibili M tali che $M^T JM = J$ dove $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ e $I_n \in GL(n, R)$ è l'identità.

   (a) Dimostrare che $Sp(n, \mathbb{R}) \subset GL(2n, \mathbb{R})$ è una sottovarietà regolare e calcolarne la dimensione.
   (b) Descrivere lo spazio tangente $T_J Sp(n, \mathbb{R})$ a $Sp(n, \mathbb{R})$ nella matrice J come un sottospazio vettoriale di $M(2n, \mathbb{R})$ (matrici $2n \times 2n$ qualunque).
   (c) Descrivere lo spazio tangente $T_{I_{2n}} Sp(n, \mathbb{R})$ a $Sp(n, \mathbb{R})$ nella matrice identità $I_{2n} \in GL(2n, \mathbb{R})$ come sottospazio vettoriale di $M(2n, \mathbb{R})$.
   (d) Sia $\iota \colon Sp(n, \mathbb{R}) \to Sp(n, \mathbb{R})$ l'applicazione di inversione $\iota(M) = M^{-1}$. Trovare il differenziale $d\iota \colon T_{I_{2n}} Sp(n, \mathbb{R}) \to T_{I_{2n}} Sp(n, \mathbb{R})$ di ι nel punto I_{2n} (calcolare $d\iota(A)$ per una matrice $A \in T_{I_{2n}} Sp(n, \mathbb{R})$ qualunque).

3. Si consideri la superficie parametrizzata $S \subset \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u - v, u + v, 3uv - u^2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

   (a) Trovare l'equazione cartesiana del piano tangente affine $T_P(S)$ nel punto generico $P = \mathbf{x}(u, v)$.
   (b) Stabilire la natura dei punti di S.
   (c) Determinare le direzioni principali di S nel punto $Q = \mathbf{x}(0, 0)$.