Corso di Geometria 2 - a.a. 2015-2016

Prova scritta del 21 gennaio 2016

1. (10 punti). Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie regolare ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva nel piano yz di equazione $(y-2)^2 + z^2 = 1$. Siano π_1 e π_2 le applicazioni differenziabili $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ date rispettivamente da $\pi_1(x, y, z) = (x, y)$, $\pi_2(x, y, z) = (x, z)$.

   (a) Determinare il sottoinsieme $S_1 \subset S$ dato dai punti critici dell'applicazione π_1 ristretta a S.

   (b) Determinare il sottoinsieme $S_2 \subset S$ dato dai punti critici dell'applicazione π_2 ristretta a S.

   (c) Dimostrare che per una qualunque componente connessa C di S_1 il complementare $S \setminus C$ è omotopicamente equivalente al cerchio S^1.

   (d) Dimostrare che S_2 è connesso per archi e che ogni componente connessa di $S \setminus S_2$ è contraibile.

   (e) Dimostrare che S_2 è omotopicamente equivalente all'unione in un punto di 5 copie di S^1 (bouquet di 5 cerchi).
   (Suggerimento: contrarre opportuni sottospazi di S_2 omeomorfi all'intervallo $[0, 1]$).

2. (10 punti).

   (a) Sia M una varietà differenziabile compatta. Se $f: M \to \mathbb{R}$ è una funzione C^∞ mostrare che esiste almeno un punto $p \in M$ tale che il differenziale $df_p: T_pM \to \mathbb{R}$ è l'applicazione nulla.

   (b) Sia S^2 la sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$ e $N = (0, 0, 1)$. Costruire una funzione $f: S^2 \setminus N \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che per ogni $p \in S^2 \setminus N$ il differenziale $df_p: T_pS^2 \to \mathbb{R}$ non sia l'applicazione nulla.

   (c) Sia S^2 la sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$. Costruire una funzione $f: S^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che il differenziale $df_p: T_pS^2 \to \mathbb{R}$ sia l'applicazione nulla per esattamente 2 punti distinti su S^2.

3. (10 punti). Sia $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sfera unitaria. Indichiamo con N_x il versore normale uscente in un punto $x \in S^2$. Sia $f: S^2 \to \mathbb{R}$ una applicazione

di classe C^∞ tale che per ogni $x \in S^2$ si abbia $f(x) > -1$. Si consideri il sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}^3$ dato da

$$S = \{x + f(x)N_x \,:\, x \in S^2\}.$$

(a) Dimostrare che S è una sottovarietà regolare diffeomorfa a S^2.

(b) Sia $p \in S$ un punto di massimo o minimo relativo della funzione f. Calcolare la curvatura Gaussiana κ_p di S nel punto p in funzione di f.

(c) In un punto p come sopra discutere quando si ha $\kappa_p \geq 1$.

(d) Sia $\kappa : S \to R$ la funzione differenziabile data dalla curvatura Gaussiana. Si indichi con $d\sigma$ la forma d'area di S. Calcolare

$$\int_S \kappa \, d\sigma.$$