Corso di Geometria 2 - a.a. 2014-2015

Prova scritta del 1 settembre 2015

1. (10 punti). Si considerino in $\mathbb{R}^3$ il punto $O = (0,0,0)$ e la retta $r\colon x = y = 0$. Siano $X_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ e $X_2 = \mathbb{R}^3 \setminus \{r\}$.

   (a) Verificare che X_1 e X_2 sono connessi per archi.

   (b) Stabilire se X_1 e X_2 sono omeomorfi.

   (c) Stabilire se X_2 è un retratto di deformazione di X_1.

   (d) Stabilire se X_1 e X_2 sono omotopicamente equivalenti.

2. (10 punti). Siano S e T superfici regolari in $\mathbb{R}^3$.

   (a) Mostrare che se $i : S \to T$ è una isometria e $\alpha : [0,1] \to S$ è una curva geodetica chiusa in S allora $i \circ \alpha$ è una curva geodetica chiusa in T.

   (b) Fissato $r > 0$ si consideri la superficie regolare S_r in $\mathbb{R}^3$ data da

   $$S_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = r^2\}.$$

   Determinare tutte le curve geodetiche chiuse di S_r.

   (c) Fissati $R > r > 0$ discutere se le due superfici S_r e S_R possono essere isometriche.

   (d) Fissato $r > 0$ descrivere tutte le isometrie di S_r in sé.

3. (10 punti). Sia $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}[x]$ l'insieme dei polinomi reali monici di grado 2. Identifichiamo in modo naturale $\mathcal{P}$ a $\mathbb{R}^2$. Si consideri l'applicazione $F\colon M(2,\mathbb{R}) \to \mathcal{P}$ che a una matrice reale $A \in M(2,\mathbb{R})$ associa il suo polinomio caratteristico $p_A(x) \in \mathcal{P}$,

   $$F(A) = p_A(x).$$

   (a) Fissata $A \in M(2,\mathbb{R})$, calcolare il differenziale di F nel punto A,

   $$dF_A\colon T_A M(2,\mathbb{R}) \to T_{p_A(x)}\mathcal{P}$$

   visto in modo naturale come una applicazione lineare da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^2$.

(b) Dire per quali matrici $A \in M(2, \mathbb{R})$ il differenziale dF_A *non* è una applicazione suriettiva.

(c) Fissati numeri reali λ, μ con $\lambda \neq \mu$ sia $V_{\lambda,\mu} \subset M(2, \mathbb{R})$ il sottoinsieme formato dalle matrici con autovalori λ, μ. Dimostrare che $V_{\lambda,\mu}$ è una sottovarietà regolare di dimensione 2.

(d) Determinare lo spazio tangente a $V_{\lambda,\mu}$ nel punto dato dalla matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.