Corso di Geometria 2 - a.a. 2014-2015

Prova scritta del 17 settembre 2015

1. (10 punti). Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i seguenti sottoinsiemi:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0\}$$
$$S' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 0\}.$$

Si consideri lo spazio topologico $X = S \cup S'$.

   (a) Stabilire se X è uno spazio topologico convesso.

   (b) Stabilire se X è uno spazio topologico contraibile.

   (c) Verificare che X è connesso per archi.

   (d) Verificare che $\pi_1(X, p) = 0$, per ogni $p \in X$.

2. (10 punti). Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie regolare ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva contenuta nel piano y, z di equazione $(y-2)^2+z^2 = 1$. Per $0 \leq \alpha < 1$ sia $R_\alpha \subset S$ la regione di S data da

$$R_\alpha = \{(x, y, z) \in S \,:\, z > \alpha\}.$$

Fissiamo su S l'orientazione uscente e su R_α e il suo bordo ∂R_α le orientazioni compatibili.

   (a) Mostrare che le componenti connesse di ∂R_α sono il supporto di curve regolari semplici in S.

   (b) Calcolare la curvatura geodetica delle componenti connesse di ∂R_α.

   (c) Calcolare la caratteristica di Eulero-Poincaré $\chi(R_\alpha)$.

   (d) Sia K la curvatura gaussiana di S. Calcolare l'integrale

$$\int_{R_\alpha} K.$$

3. (10 punti). Sia $\mathbb{G}(2, 4)$ la varietà differenziabile (Grassmanniana) che parametrizza i sottospazi $\pi \subset \mathbb{R}^4$ con $\dim \pi = 2$. Si consideri la funzione F da $\mathbb{G}(2, 4)$ in sé che associa a un sottospazio π il suo complemento ortogonale $\pi^\perp$ rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$,

$$F(\pi) = \pi^\perp.$$

Indichiamo con $U_I \subset \mathbb{G}(2,4)$ l'aperto coordinato standard di $\mathbb{G}(2,4)$ corrispondente alle scelta di un minore di indice $I \subset \{1,2,3,4\}$.

(a) Mostrare che $F(U_I) = U_J$ per un opportuno indice J.

(b) Scrivere F nelle coordinate locali di U_I e U_J.

(c) Mostrare che il differenziale dF è un isomorfismo in ogni punto.

(d) Mostrare che F è un diffeomorfismo.