1. Dimostrare che l'atlante standard su $\mathbb{R}P^2$ non è orientato.

2. Discutere se l'atlante standard sulla varietà di Grassmann $G(2,4)$ dei 2-piani in $\mathbb{R}^4$ sia orientato.

3. Si consideri l'applicazione $\iota\colon G(2,4) \to \mathbb{R}P^5$ definita da

$$[M] \to [\det M_{1,2}, \det M_{1,3}, \det M_{1,4}, \det M_{2,3}, \det M_{2,4}, \det M_{3,4}]$$

   dove $[M]$ è il punto di $G(2,4)$ rappresentato da una matrice M e $M_{i,j}$ indicano le sottomatrici 2×2. Dimostrare che ι è ben definita e una immersione.

4. Siano V, W campi vettoriali su una varietà. Indico con VW la composizione (si ha $VW(F) = V(W(F))$ per $F \in C^\infty$).

   (a) Mostrare che VW *non* è un campo vettoriale.

   (b) Mostrare che la differenza $[V,W] := VW - WV$ è un campo vettoriale.

   (c) Scrivere il campo $[V,W]$ rispetto a coordinate locali.

5. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x^3+xz^2+y^2, x^2+y^2-z^2)$. Determinare i punti critici e i valori critici di f. Mostrare che il sottoinsieme $C \subset \mathbb{R}^3$, $C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + xz^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 - z^2 = 2\}$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 e determinare lo spazio tangente a C nel punto di intersezione di C con il piano $\{z = 0\}$.

6. Sia $M = M(n,m)$ la varietà differenziabile delle matrici reali $n \times m$, e si fissi un intero $k \geq 1$.

   (a) Mostrare che ogni punto del sottoinsieme $X \subset M$ formato dalle matrici $m \in M$ con minore $(m_{ij})_{1\leq i\leq k, 1\leq j\leq k}$ invertibile gode della proprietà di sottovarietà regolare.

   (b) Mostrare che il sottoinsieme $Y \subset M$ formato dalle matrici $m \in M$ di rango k è una sottovarietà regolare, di dimensione $k(n+m-k)$.

7. Dimostrare che $SL(n,\mathbb{R}) \subset GL(n,\mathbb{R})$ è una sottovarietà e calcolarne la dimensione. Determinare lo spazio tangente $T_I SL(n,\mathbb{R})$.

8. Dimostrare che $SO(n,\mathbb{R}) \subset GL(n,\mathbb{R})$ è una sottovarietà e calcolarne la dimensione. Determinare lo spazio tangente $T_I SO(n,\mathbb{R})$.

9. Si consideri il sottospazio topologico $M \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ definito da

$$M = \{(v, w) : ||v|| = ||w|| = 1, v \cdot w = 0\}.$$

Si denoti con $\pi \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione sul primo fattore.

   (a) Dimostrare che M ammette una struttura di varietà differenziabile di dimensione 3, tale che π induce una sommersione

   $$\pi|_M \colon M \to S^2 \subset \mathbb{R}^3.$$

   (b) Esistono applicazioni differenziabili $f \colon S^2 \to M$ tali che $\pi \circ f$ sia l'identità su S^2? Motivare la risposta.

10. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie parametrica di equazioni:

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v), \qquad (u, v) \in U,$$

dove $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \, : \, -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, \ v > 0\}$.

   (a) Verificare che S è il grafico di una funzione differenziabile.

   (b) Calcolare la curvatura Gaussiana nel punto generico $P = \mathbf{x}(u, v)$.

   (c) Si consideri la funzione $f \colon S \to \mathbb{R}$ tale che $f(x, y, z) = \frac{y-x}{z^2}$.

      i. Verificare che f è differenziabile.

      ii. Sia $Q = (1, 0, 1) \in S$, determinare la matrice rappresentativa del differenziale $df_Q \colon T_Q(S) \to \mathbb{R}$ nella base indotta dalla parametrizzazione $\mathbf{x}$ nel punto Q.

      iii. Trovare una curva regolare su S passante per Q ed avente come vettore tangente un vettore di $\ker df_Q$.

11. Determinare i luoghi dei punti ellittici, parabolici, iperbolici di un toro $S^1 \times S^1$ immerso regolarmente in $\mathbb{R}^3$ come superficie di rotazione.

12. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0, \ xy - z^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

   (a) Dimostrare che S è una superficie regolare orientabile di classe C^∞.

   (b) Determinare la natura dei punti di S.

   (c) Dire se S contiene punti ombelicali.

   (d) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (x, y, -z)$. Mostrare che la restrizione di F ad S è un'isometria di S.

(e) Stabilire se S è una superficie rigata.

13. Calcolare i simboli di Christoffel Γ_{ij}^k della sfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ e di un toro $S^1 \times S^1$ immerso in $\mathbb{R}^3$ come superficie di rotazione.

14. Sia (U, ϕ) una carta locale su una superficie S dotata di metrica Riemanniana g tale che si abbia $E = F = \lambda, G = 0$ per una certa funzione $\lambda \in C^\infty(S)$. Si calcoli la curvatura Gaussiana κ_g rispetto a queste coordinate.

15. Sia g una metrica Riemanniana su una superficie S. Consideriamo una seconda metrica h legata a g dalla relazione $h = e^\varphi g$ dove φ è una funzione C^∞ su S. Si esprima la curvatura Gaussiana κ_h della metrica h in funzione della curvatura Gaussiana κ_g di g e della funzione φ.

16. Sia $T = S^1 \times S^1$ il toro di dimensione 2. Descrivere l'insieme di *tutte* le connessioni $\nabla : \mathfrak{X}(T) \times \mathfrak{X}(T) \to \mathfrak{X}(T)$. Determinare le condizioni affiché ∇ sia simmetrica, oppure affinché ∇ sia compatibile con una data metrica g su T.

17. Per $a > r > 0$, sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie regolare orientata (con orientazione uscente) espressa in forma Cartesiana da

$$z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2.$$

Siano $X \subset S$ e $Y \subset S$ le regioni dove la curvatura Gaussiana K è positiva, rispettivamente negativa.

a) Mostrare che il complementare $S \setminus \{X \cup Y\}$ è formato dal supporto di due curve regolari α_1, α_2. Che tipo di curve sono?

b) Calcolare la curvatura geodetica delle curve trovate al punto precedente.

c) Calcolare le caratteristiche di Eulero-Poincare $\chi(X)$ e $\chi(Y)$.

d) Si calcolino gli integrali

$$\int_X K dS, \quad \int_Y K dS.$$

18. (a) Sia v un campo vettoriale C^∞ su $\mathbb{R}^2$. Si fornisca la definizione dell'indice $I(v, p)$ di v rispetto a un suo punto singolare $p \in \mathbb{R}^2$.

(b) Siano x, y le coordinate canoniche su $\mathbb{R}^2$. Dire per quali funzioni $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ il campo vettoriale

$$v = f(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$$

ha indice $I(v, (0, 0))$ ben definito. Si calcoli tale indice.

(c) Posto $z = x + iy$, si consideri per ogni intero $k > 0$ il campo vettoriale

$$w_k = \mathrm{Re}(z^k)\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{Im}(z^k)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Utilizzando solo la definizione di indice si calcoli $I(w_k, (0, 0))$.