Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 18 dicembre 2019

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = x\left((\log x)^3 - 3(\log x)^2 + 2(\log x) - 2\right)$$

determinandone insieme di definizione, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui) estremi superiore ed inferiore (o massimo e minimo), punti di massimo o di minimo locali e punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita per $x > 0$ a causa della presenza del logaritmo. La funzione è derivabile (quindi anche continua) in tutto il suo insieme di definizione. Vediamo i limiti.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\log^3 x\left(1 - \frac{3}{\log x} + \frac{2}{\log^2 x} - \frac{2}{\log^3 x}\right) = 0\cdot 1 = 0$$

avendo sfruttato il limite notevole

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha |\log x|^\beta = 0, \qquad \forall \alpha, \beta > 0.$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x\log^3 x\left(1 - \frac{3}{\log x} + \frac{2}{\log^2 x} - \frac{2}{\log^3 x}\right) = +\infty\cdot 1 = +\infty.$$

La funzione quindi non è limitata superiormente ma è limitata inferiormente. Non ci sono asintoti né verticali né orizzontali. Verifichiamo l'eventuale presenza di un asintoto obliquo.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \log^3 x\left(1 - \frac{3}{\log x} + \frac{2}{\log^2 x} - \frac{2}{\log^3 x}\right) = +\infty$$

quindi non c'è asintoto obliquo. Troviamo ora gli intervalli di monotonia studiando il segno della derivata.

$$f'(x) = \log^3 x - 3\log^2 x + 2\log x - 2 + x\left(\frac{3\log^2 x}{x} - \frac{6\log x}{x} + \frac{2}{x}\right)$$

$$= \log^3 x - 3\log^2 x + 2\log x - 2 + 3\log^2 x - 6\log x + 2 = \log^3 x - 4\log x = \log x(\log^2 x - 4)$$

$$= \log x(\log x + 2)(\log x - 2).$$

Ne segue che

$$f'(x) > 0 \iff \log x \in (-2, 0)\cup(2, +\infty) \iff x \in (e^{-2}, 1)\cup(e^2, +\infty).$$

La funzione f sarà quindi strettamente decrescente in $(0, e^{-2}]$, strettamente crescente in $[e^{-2}, 1]$, strettamente decrescente in $[1, e^2]$ e strettamente crescente in $[e^2, +\infty)$. Il punto di ascissa $x = e^{-2}$ è di minimo locale, $x = 1$ è di massimo locale e $x = e^2$ è di minimo locale. Per determinare il minimo della funzione confrontiamo il valore che assume nei punti $x = e^{-2}$ e $x = e^2$.

$$f\left(e^{-2}\right) = e^{-2}\left((-2)^3 - 3(-2)^2 + 2(-2) - 2\right) = \frac{-8 - 12 - 4 - 2}{e^2} = -\frac{26}{e^2}$$

$$f(e^2) = e^2\left(2^3 - 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2 - 2\right) = e^2(8 - 12 + 4 - 2) = -2e^2.$$

Osservando che

$$-2e^2 < -\frac{26}{e^2} \iff e^4 > 13$$

otteniamo che il minimo di f vale $-2e^2$.

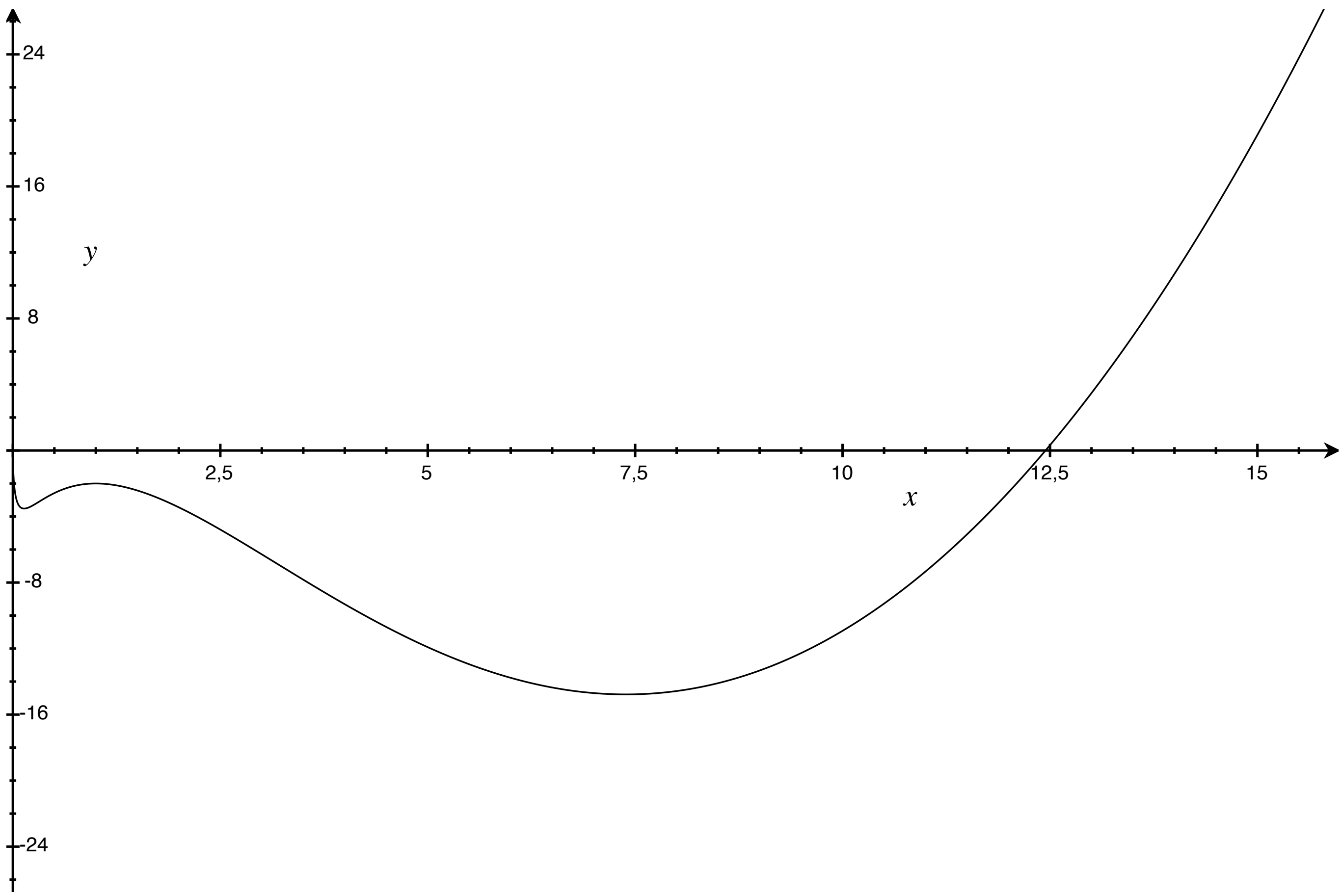
Vediamo ora la convessità calcolando la derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{3\log^2 x}{x} - \frac{4}{x} = \frac{3\log^2 x - 4}{x}.$$

Avremo allora che

$$f''(x) > 0 \iff 3\log^2 x - 4 > 0 \iff \log^2 x > \frac{4}{3} \iff \log x \in \left(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$$
$$\iff x \in \left(0, e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}}\right) \cup \left(e^{\frac{2}{\sqrt{3}}}, +\infty\right).$$

La funzione è quindi convessa in $\left(0, e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}}\right]$, concava in $\left[e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}}, e^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right]$ e convessa in $\left[e^{\frac{2}{\sqrt{3}}}, +\infty\right)$. I punti di ascissa $x = e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}}$ e $x = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ sono di flesso.



Esercizio 2 Trovare la primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{e^{3x} - e^x + 1}{e^x - 1}$$

che vale 0 per $x = 1$, determinando il più grande intervallo in cui è definita.

Soluzione

La funzione integranda è definita in tutto $\mathbb{R}$ tranne che per $x = 0$, dove il denominatore si annulla. Dato che il punto dove dobbiamo calcolare la primitiva è $x = 1$, cercheremo la primitiva nell'intervallo $(0, +\infty)$ che contiene il punto $x = 1$. Effettuiamo la sostituzione

$$x = \log t, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$$

con il relativo cambio di differenziale $dx = \frac{dt}{t}$, ottenendo

$$\int \frac{e^{3x} - e^x + 1}{e^x - 1}\, dx = \int \frac{t^3 - t + 1}{t - 1} \frac{dt}{t} = \int \frac{t^3 - t + 1}{t^2 - t}\, dt.$$

Facendo al divisione tra polinomi, otteniamo che

$$t^3 - t + 1 = (t^2 - t)(t + 1) + 1$$

quindi

$$\int \frac{t^3 - t + 1}{t^2 - t}\, dt = \int t + 1 + \frac{1}{t^2 - t}\, dt = \frac{t^2}{2} + t + \int \frac{dt}{(t-1)t} = \frac{t^2}{2} + t + \log\left|\frac{t-1}{t}\right| + c.$$

Ritornando alla variabile x otteniamo che

$$\int \frac{e^{3x} - e^x + 1}{e^x - 1}\, dx = \frac{e^{2x}}{2} + e^x + \log\left|\frac{e^x - 1}{e^x}\right| + c = \frac{e^{2x}}{2} + e^x + \log\frac{e^x - 1}{e^x} + c$$

avendo tenuto conto che $x > 0$ quindi l'argomento del valore assoluto è positivo. Ricaviamo ora la costante c utilizzando il fatto che la funzione deve assumere il valore 0 per $x = 1$

$$0 = \frac{e^2}{2} + e + \log\frac{e-1}{e} + c \iff c = -\frac{e^2}{2} - e - \log(e-1) + 1.$$

La primitiva cercata è quindi

$$F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + e^x + \log\frac{e^x - 1}{e^x} - \frac{e^2}{2} - e - \log(e-1) + 1$$

con $x \in (0, +\infty)$.

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{x}{y^3} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

e trovare il massimo e il minimo (o estremi superiore e inferiore) della soluzione $y(x)$.

Soluzione

L'equazione è a variabili separabili, definita per $y \neq 0$. Separando le variabili e integrando, otteniamo

$$\int y^3\, dy = -\int x\, dx + c.$$

Calcolando gli integrali abbiamo

$$\frac{y^4}{4} = -\frac{x^2}{2} + c.$$

Ricaviamo la costante c dalla condizione $y(0) = 2$

$$\frac{2^4}{4} = -\frac{0}{2} + c \iff 4 = c.$$

Quindi la soluzione, in forma implicita, è

$$\frac{y^4}{4} = -\frac{x^2}{2} + 4 \iff y^4 = -2x^2 + 16.$$

La funzione y^4 non è globalmente invertibile, ma osservando che $y(0) = 2 > 0$ sceglieremo la radice positiva, ottenendo

$$y(x) = \sqrt[4]{16 - 2x^2}.$$

La funzione $y(x)$ è definita se $16 - 2x^2 \geq 0$ ma dobbiamo escludere i valori dove $y = 0$, per i quali l'equazione differenziale perde di significato. Dovrà quindi essere

$$16 - 2x^2 > 0 \iff 8 > x^2 \iff -2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}.$$

Dato che $y(x) > 0$ per ogni $x \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ e che

$$\lim_{x \to \pm 2\sqrt{2}} y(x) = 0$$

otteniamo che $\inf(y) = 0$. Sempre dal risultato sui limiti agli estremi del dominio, dal teorema di Weierstrass generalizzato, sappiamo che la y ha massimo. Tale massimo deve essere assunto in un punto interno al dominio, quindi, per il teorema di Fermat, la derivata si deve annullare. Direttamente dall'equazione differenziale abbiamo che

$$y'(x) = -\frac{x}{y^3} = 0 \iff x = 0$$

quindi il punto di ascissa $x = 0$ è punto di massimo assoluto e

$$\max(y) = y(0) = 2.$$