Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 14 gennaio 2020

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = (|x+1| - |x-1|) \log |x|.$$

- **(6 punti)** Determinare insiemi di definizione, di continuità e di derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui) estremi superiore ed inferiore (o massimo e minimo), punti di massimo o di minimo locali, intervalli di convessità e punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

- **(4 punti)** Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = a$, al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Soluzione

La funzione è definita quando l'argomento del logaritmo è strettamente maggiore di 0, quindi per $x \neq 0$. Osserviamo inoltre che

$$f(-x) = (|-x+1| - |-x-1|) \log|-x| = (|x-1| - |x+1|) \log |x| = -f(x)$$

quindi la funzione è dispari e la studieremo per $x > 0$. In questo caso la funzione diventa

$$f(x) = (x + 1 - |x-1|) \log x.$$

Dato che

$$|x-1| = \begin{cases} 1-x & \text{se } 0 < x < 1 \\ x-1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

otteniamo che

$$f(x) = \begin{cases} 2x \log x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 2 \log x & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Vediamo ora i limiti.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2x \log x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2 \log x = +\infty.$$

Da questo risultato abbiamo che

$$\sup(f) = +\infty$$

e, per simmetria,

$$\inf(f) = -\infty.$$

La funzione non ha quindi né massimo né minimo. Non ci sono asintoti verticali o orizzontali. Controlliamo quelli obliqui:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \log x}{x} = 0$$

quindi non ci sono neanche asintoti obliqui. La funzione è continua in tutto il suo insieme di definizione perchè composizione, somma e prodotto di funzioni continue. Per quanto riguarda la derivabilità vale lo stesso discorso, a parte il punto $x = 1$ dove si annulla il valore assoluto. Controlliamo separatamente questo punto.

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{2x \log x}{x-1} = \lim_{t \to 0^-} \frac{2(1+t)\log(1+t)}{t} = 2$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2 \log x}{x-1} = \lim_{t \to 0^+} \frac{2\log(1+t)}{t} = 2.$$

La funzione è quindi derivabile anche per $x = 1$ e $f'(1) = 2$.

Calcoliamo ora la derivata

$$f'(x) = \begin{cases} 2\log x + 2x\dfrac{1}{x} = 2\log x + 2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Risulta immediato che $f'(x) > 0$ se $x \geq 1$. Se invece $0 < x < 1$ abbiamo che

$$f'(x) > 0 \iff 2\log x + 2 > 0 \iff \log x > -1 \iff x > \frac{1}{e}.$$

La funzione sarà quindi strettamente decrescente se $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right]$ e strettamente crescente se $x \in \left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$. Il punto di ascissa $x = \frac{1}{e}$ è di minimo locale. Per simmetria, la funzione è strettamente crescente in $\left(\infty, -\frac{1}{e}\right]$, strettamente decrescente in $\left[-\frac{1}{e}, 0\right)$ e il punto di ascissa $x = -\frac{1}{e}$ è di massimo locale.

Calcoliamo ora la derivata seconda per l'analisi della convessità.

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{se } 0 < x < 1 \\ -\dfrac{2}{x^2} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Lo studio del segno è immediato

$$x \in (0,1) \Longrightarrow f''(x) > 0, \qquad x \in (1, +\infty) \Longrightarrow f''(x) < 0.$$

La funzione è quindi strettamente convessa in $(0, 1]$ e strettamente concava in $[1, +\infty)$. Il punto di ascissa $x = 1$ è di flesso perché la funzione è derivabile e cambia convessità. Osserviamo anche che, pur essendo un punto di flesso, nel punto $x = 1$ la funzione non è derivabile 2 volte dato che $f''_-(1) = 2$ mentre $f''_+(1) = -2$. Per simmetria otteniamo che f è strettamente convessa in $(-\infty, -1]$, strettamente concava in $(-1, 0)$ e il punto di ascissa $x = -1$ è di flesso.
Esaminiamo ora l'equazione

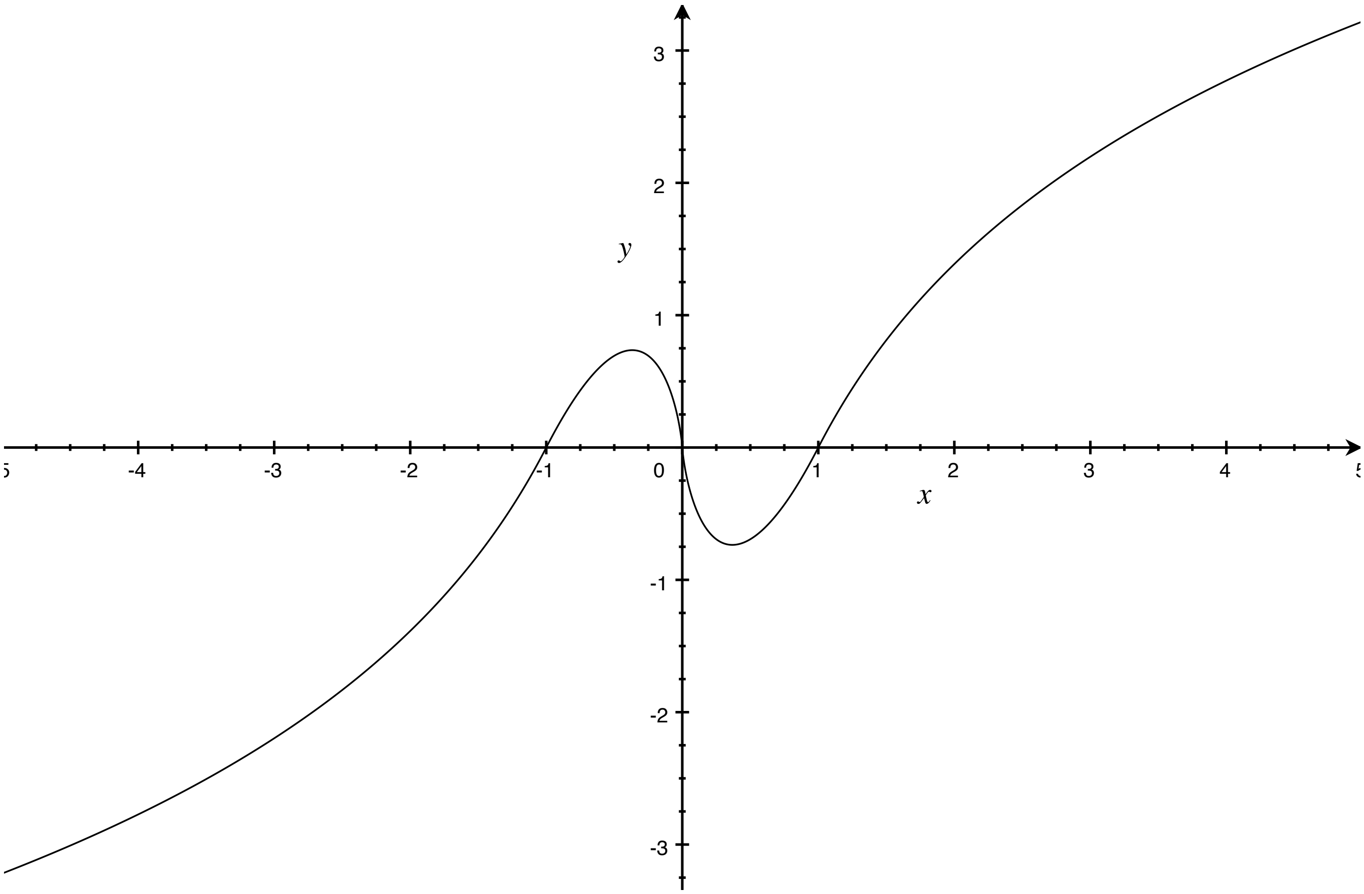
$$f(x) = a.$$

Per determinare il numero di soluzioni dobbiamo valutare il valore della funzione nei punti di massimo e di minimo locali.

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = 2\frac{1}{e}\log\frac{1}{e} = -\frac{2}{e}, \qquad f\left(-\frac{1}{e}\right) = -f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}.$$

Ne segue che l'equazione ha

- 1 soluzione se $a < -\frac{2}{e}$
- 2 soluzioni se $a = -\frac{2}{e}$
- 3 soluzioni se $-\frac{2}{e} < a < 0$
- 2 soluzioni se $a = 0$
- 3 soluzioni se $0 < a < \frac{2}{e}$
- 2 soluzioni se $a = \frac{2}{e}$
- 1 soluzione se $a > \frac{2}{e}$.



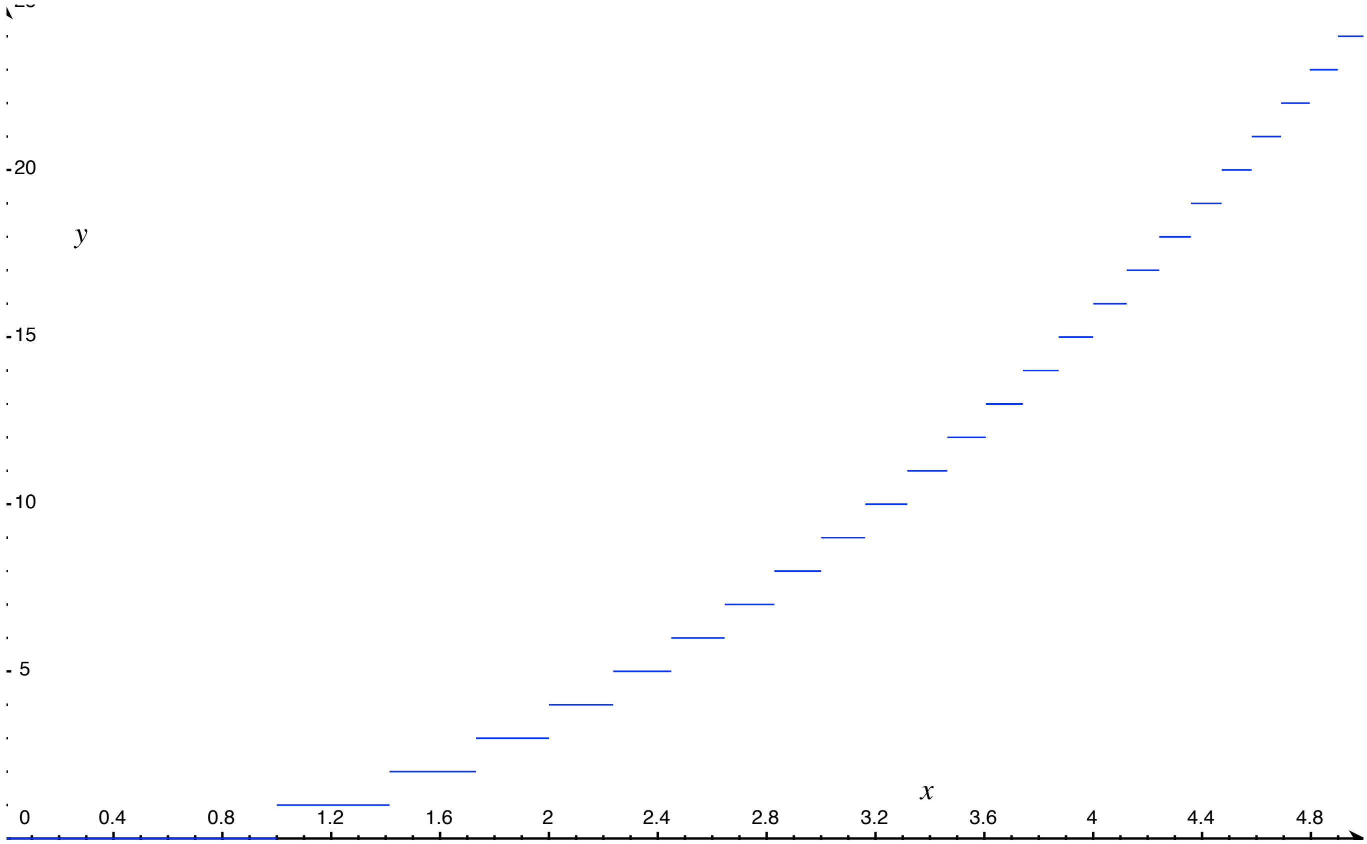
Esercizio 2

- **(4 punti)** Tracciare il grafico della funzione $f(x) = \left[x^2\right]$ per $x \geq 0$, dove $[\cdot]$ indica la parte intera.
- **(4 punti)** Calcolare l'intergrale

$$\int_0^2 [x]^2 - \left[x^2\right] \, dx.$$

Soluzione

La funzione $f(x) = \left[x^2\right]$ è costante a tratti ed ha infiniti punti di discontinuità in corrispondenza dei valori interi della funzione x^2. Il grafico è il seguente



Avremo quindi che

$$[x^2] = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 \leq x < \sqrt{2} \\ 2 & \text{se } \sqrt{2} \leq x < \sqrt{3} \\ 3 & \text{se } \sqrt{3} \leq x < 2 \\ 4 & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

Analogamente

$$[x]^2 = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 4 & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

Per calcolare l'integrale dividiamo il dominio di integrazione:

$$\int_0^2 [x]^2 - [x^2]\ dx = \int_0^1 0 - 0\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} 1 - 1\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 1 - 2\,dx + \int_{\sqrt{3}}^2 1 - 3\,dx = -1\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) - 2\left(2 - \sqrt{3}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{3} - 4.$$

Esercizio 3

- **(4 punti)** Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - \alpha y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

- **(2 punti)** Determinare per quali valori di α la soluzione ha minimo o massimo sulla semiretta $[0, +\infty)$.

- **(4 punti)** Trovare i valori di α per i quali il problema

$$\begin{cases} y'' - \alpha y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

ha soluzioni non identicamente nulle.

Soluzione

L'equazione è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti omogenea. Il polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 - \alpha.$$

Le radici del polinomio caratteristico sono

$$\begin{array}{lll} -\sqrt{\alpha}, & \sqrt{\alpha} & \text{se } \alpha \geq 0 \\ -i\sqrt{-\alpha}, & i\sqrt{-\alpha}, & \text{se } \alpha < 0. \end{array}$$

Distinguiamo tre casi:

1. $\alpha > 0$,
2. $\alpha = 0$,
3. $\alpha < 0$.

Nel caso 1. la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 e^{-\sqrt{\alpha}x} + c_2 e^{\sqrt{\alpha}x}$$

quindi

$$y'(x) = -\sqrt{\alpha}c_1 e^{-\sqrt{\alpha}x} + \sqrt{\alpha}c_2 e^{\sqrt{\alpha}x}.$$

Ne segue che

$$y(0) = c_1 + c_2, \qquad y'(0) = -\sqrt{\alpha}c_1 + \sqrt{\alpha}c_2$$

Imponendo le condizioni iniziali otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -\sqrt{\alpha}c_1 + \sqrt{\alpha}c_2 = 2 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione

$$c_1 = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \qquad c_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{-\sqrt{\alpha}x} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{\sqrt{\alpha}x}.$$

Nel caso 2. abbiamo la radice doppia $\alpha = 0$ quindi la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 + c_2 x.$$

Derivando abbiamo

$$y'(x) = c_2$$

quindi

$$y(0) = c_1, \qquad y'(0) = c_2$$

e, dalle condizioni iniziali

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = 2.$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = 2x.$$

Osserviamo che la soluzione si poteva ottenere anche integrando due volte l'equazione $y'' = 0$ utilizzando le condizioni iniziali.

Nel caso 3. la soluzione generale è
$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\alpha}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\alpha}x)$$
quindi
$$y'(x) = -c_1\sqrt{-\alpha}\sin(\sqrt{-\alpha}x) + c_2\sqrt{-\alpha}\cos(\sqrt{-\alpha}x).$$
Nel punto iniziale risulta
$$y(0) = c_1, \qquad y'(0) = c_2\sqrt{-\alpha}.$$
Dalle condizioni iniziali otteniamo
$$c_1 = 0, \qquad c_2 = \frac{2}{\sqrt{-\alpha}}.$$
La soluzione del problema di Cauchy è quindi
$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{-\alpha}}\sin(\sqrt{-\alpha}x).$$

Per stabilire l'esistenza del massimo o del minimo sulla semiretta $[0, +\infty)$ calcoliamo il limite per x che tende a $+\infty$ nei tre casi. Nel primo caso
$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{-\sqrt{\alpha}x} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{\sqrt{\alpha}x} = +\infty$$
quindi la funzione non ha massimo ma ha minimo (per il teorema di Weierstrass generalizzato, dato che è continua sulla semiretta chiusa $[0, +\infty)$). In modo analogo, nel secondo caso
$$\lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$$
non c'è il massimo ma c'è il minimo. Nell'ultimo caso la funzione $y(x) = \frac{2}{\sqrt{-\alpha}}\sin(\sqrt{-\alpha}x)$ ha sia massimo che minimo.
Risolviamo ora il secondo problema, imponendo le condizioni
$$y(0) = y(\pi) = 0.$$
Nel primo caso abbiamo
$$y(0) = c_1 + c_2, \qquad y(\pi) = c_1e^{-\sqrt{\alpha}\pi} + c_2e^{\sqrt{\alpha}\pi}$$
quindi
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1e^{-\sqrt{\alpha}\pi} + c_2e^{\sqrt{\alpha}\pi} = 0 \end{cases}$$
che ha come unica soluzione $c_1 = c_2 = 0$ che corrisponde alla soluzione identicamente nulla. Nel secondo caso $y(x) = c_1 + c_2x$ quindi
$$y(0) = c_1, \qquad y(\pi) = c_1 + c_2\pi.$$
Allora deve essere
$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2\pi = 0 \end{cases}$$
e anche in questo caso abbiamo $c_1 = c_2 = 0$, quindi la soluzione identicamente nulla.
Nel terzo caso
$$y(0) = c_1, \qquad y(\pi) = c_1\cos(\sqrt{-\alpha}\pi) + c_2\sin(\sqrt{-\alpha}\pi).$$
Otteniamo il sistema
$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1\cos(\sqrt{-\alpha}\pi) + c_2\sin(\sqrt{-\alpha}\pi) = 0 \end{cases}$$
quindi deve essere
$$c_2\sin(\sqrt{-\alpha}\pi) = 0$$
che ha come possibili soluzioni $c_2 = 0$ oppure $\sin(\sqrt{-\alpha}\pi) = 0$. Se $c_2 = 0$ abbiamo la soluzione identicamente nulla, quindi l'unica possibilità è che sia
$$\sin(\sqrt{-\alpha}\pi) = 0$$
e questo corrisponde a valori interi di $\sqrt{-\alpha}$. Quindi deve essere
$$\sqrt{-\alpha} = n \in \mathbb{Z} \iff -\alpha = n^2$$
cioè α deve essere l'opposto del quadrato di un numero intero non nullo.