Lezione 6-12

SIMULAZIONE TEST: MARTEDÌ 10 DICEMBRE ORE 14 AULA F.

$$\begin{cases} y' = x^2 y + x^2 \\ y(3) = -1 \end{cases} \longrightarrow y(x_0) = -1$$

soluzione $y(x) = -1$

Soluzione generale: $y(x) = -1 + c \cdot e^{x^3/3}$

Sostituiamo $x = 3$, $y = -1$

$$-1 = -1 + c\, e^{3^3/3} \Rightarrow 0 = c \cdot e^{9} \Rightarrow c = 0$$

Soluzione $y(x) = -1$ costante.

Equazioni a variabili separabili

$$\begin{cases} y' = a(x) \cdot f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$a(x)$ → dipende solo da x

$f(y)$ → dipende solo da y

Cerchiamo $y(x)$ tale che $y'(x) = a(x) \cdot f(y(x))$

Possiamo "separare" le variabili x e y

- Supponiamo che a e f siano funzioni continue.
- Supponiamo inoltre che $f(y_0) \neq 0$

Poiché f è continua $\Rightarrow f(y) \neq 0$ in un intorno di y_0.

Divido l'equaz. per $f(y)$:

$$\frac{y'}{\underbrace{f(y)}_{\text{dipende solo da } y}} = a(x)$$

dipende solo da x

Ho separato le variabili.

- Posso trovare una primitiva di $\frac{1}{f(y)}$ cioè una funzione

$G(y)$ t.c. $G'(y) = \frac{1}{f(y)}$

- Posso trovare anche una primitiva di $a(x)$, cioè

$A(x)$ t.c. $A'(x) = a(x)$

Ma y è una funzione di x, allora calcolo

$$\frac{d}{dx}\left(G(y(x))\right) = \frac{dG}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(y)} \cdot y'$$

L'equazione $\frac{y'}{f(y)} = a(x)$ diventa

$$\frac{d}{dx}\left(G(y(x))\right) = a(x)$$ integro in dx

$$\frac{df}{dx}$$

$$\Rightarrow \int \boxed{\frac{d}{dx}\left(G(y(x))\right)} \cdot dx = \int a(x) \cdot dx$$, cioè

$G(y(x)) = A(x) + c \longrightarrow$ soluzione in forma implicita.

Devo ricavare $y(x)$. In teoria è sempre possibile poiché $G' = \frac{1}{f} \neq 0$ in un intorno di y_0 $\Rightarrow$ In particolare $G' > 0$ o $G' < 0$ in un intorno di y_0 $\Rightarrow$ G è strettamente monotona $\Rightarrow$ G è invertibile in un intorno di y_0.

Allora $G(y(x)) = A(x) + c$ ottengo

$y(x) = G^{-1}(A(x)+c)$ $\rightarrow$ soluzione in forma esplicita.

Oss: La dimostrazione dell'esistenza della soluzione è locale, cioè vale in un intorno di (x_0, y_0). Quindi la soluzione esiste certamente in un intorno di x_0, non sono sicuro che tale soluzione sia definita $\forall x \in \mathbb{R}$.

Def: L'intervallo massimale di esistenza della soluzione è il più grande intervallo che contiene il punto x_0 dove la soluzione è definita.

Oss: Cosa succede se $f(y_0)=0$?

$$\begin{cases} y' = a(x) \cdot f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

C'è una soluzione immediata $y(x) = y_0$

Metodo pratico:

$y' = a(x) \cdot f(y)$.

Scriviamo $y' = \dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{dy}{dx} = a(x) \cdot f(y) \Rightarrow \dfrac{dy}{f(y)} = a(x) \cdot dx$ integriamo

$$\underbrace{\int \frac{dy}{f(y)}}_{G(y)} = \int a(x) \cdot dx + c \Rightarrow G(y) = A(x) + c$$

Esempio:

$$\begin{cases} y' = -\left(\dfrac{6x+3}{x^2+x+1}\right)\cdot (y-1)^2 \\ y(0) = \dfrac{3\log 3 - 1}{3\log 3} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{6x+3}{x^2+x+1}\right)\cdot (y-1)^2$$

$$\int \frac{dy}{(y-1)^2} = \int -\frac{6x+3}{x^2+x+1}\cdot dx + c$$

$$\int \frac{dy}{(y-1)^2} = \int (y-1)^{-2}\cdot dy = -(y-1)^{-1} = -\frac{1}{y-1}$$

$$-\int \frac{6x+3}{x^2+x+1} \cdot dx = -3\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} \cdot dx = -3 \cdot \log|x^2+x+1|$$

$$\Rightarrow +\frac{1}{y-1} = +3 \cdot \log|x^2+x+1| + c$$

Posso liberarmi del valore assoluto?

La soluzione è definita in un intorno del punto iniziale x_0;

quindi l'argomento del valore assoluto avrà lo stesso segno

che ha nel punto x_0 (teo di permanenza del segno)

Nel nostro caso $x_0 = 0 \Rightarrow x_0^2 + x_0 + 1 = 1 > 0$

$\Rightarrow |x^2+x+1| = x^2+x+1$ in un intorno di x_0

$$\Rightarrow +\frac{1}{y-1} = 3\cdot\log(x^2+x+1)+c.$$

Posso ricavare c dalla condizione $y(0) = \dfrac{3\log 3 - 1}{3\log 3} = 1 - \dfrac{1}{3\log 3}$

$$\frac{1}{\cancel{1} - \frac{1}{3\log 3} - \cancel{1}} = 3\,\cancel{\log(1)} + c \Rightarrow c = -3\log 3.$$

La soluzione in forma implicita è

$$\frac{1}{y-1} = 3\log(x^2+x+1) - 3\log 3 \longrightarrow \text{soluzione in forma implicita}$$

$$G(y) = \frac{1}{y-1}$$

Ricavo y

$$y-1=\frac{1}{3\log(x^2+x+1)-3\log 3} \Rightarrow y=1+\frac{1}{3\log(x^2+x+1)-3\log 3}=$$

$$=1+\frac{1}{3\cdot\log\left(\frac{x^2+x+1}{3}\right)}$$

$$\begin{cases} y'=\operatorname{tg} x \cos^2 y \\ y(0)=1 \end{cases}$$

$y_0=1 \quad \cos^2(y_0)=\cos^2 1 \neq 0$

divido per $\cos^2 y$

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int tg\, x \cdot dx + c$$ separo le variabili

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = tg\, y$$ 1° integrale

$$\int tg\, x \cdot dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot dx = -\log|\cos x|$$

$x_0 = 0 \Rightarrow \cos x_0 = 1 > 0 \Rightarrow \cos x > 0$ in un intorno di $x_0 \Rightarrow$ tolgo il valore assoluto

$$\Rightarrow tg\, y = -\log(\cos x) + c$$

Ricavo c usando $x=0$, $y=1$

$\operatorname{tg} 1 = \cancel{-\log(\cos 0)} + c \Rightarrow c = \operatorname{tg} 1$

$\operatorname{tg} y = -\log(\cos x) + \operatorname{tg} 1$ – soluzione in forma implicita.

$\Rightarrow y = \arctan(-\log(\cos x) + \operatorname{tg} 1)$

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti omogenee.

$y'' + ay' + by = 0 \qquad a, b \in \mathbb{R}$ costanti.

Oss: Se y_1 e y_2 sono soluzioni e $k \in \mathbb{R}$ è una costante

allora y_1+y_2 e $k \cdot y_1$ sono ancora soluzioni (poiché

$(y_1+y_2)' = y_1'+y_2'$ e $(ky)' = k \cdot y'$).

Come si risolvono?

Proviamo a vedere cosa succede con una funzione del tipo

$y(x) = e^{\lambda x}$ $\lambda \in \mathbb{R}$ fissato.

$\Rightarrow y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$

Sostituiamo nell'equazione: $y'' + ay' + by = 0$

$\underbrace{\lambda^2 \cdot e^{\lambda x}}_{y''} + a \cdot \underbrace{\lambda \cdot e^{\lambda x}}_{y'} + b \cdot \underbrace{e^{\lambda x}}_{y} = 0$ dividiamo per $e^{\lambda x}$

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, quindi $y(x) = e^{\lambda x}$ è soluzione se e solo se λ è radice del polinomio $x^2 + ax + b = 0$

Def: Il polinomio $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ si dice polinomio caratteristico dell'equazione.

Es: $y'' - y' - 6y = 0$

Pol. caratt. è $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$

Radici $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

Ho trovato due soluzioni $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-2x}$, che si chiamano soluzioni fondamentali.

sol. fondamentali

Oss: La funzione $y(x) = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{-2x}$

è soluzione dell'equazione differenziale $\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Se il polinomio caratt. ha 2 radici reali $\lambda_1 \neq \lambda_2$ distinte

allora la soluzione generale (si dice integrale generale) è

$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ – 2 costanti libere

Cosa succede se il polinomio caratteristico ha 1 sola radice reale λ_0 prendo le due soluzioni

$y_1 = e^{\lambda_0 x}$, $y_2(x) = x \cdot e^{\lambda_0 x}$ → soluzioni fondamentali

$\Rightarrow$ l'integrale generale viene $y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_0 x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda_0 x}$

Se non ci sono radici reali?

$\lambda^2 + 1 = 0$ ← viene da $y'' + y = 0$, $y'' = -y$ – $\operatorname{sen} x$, $\cos x$

Numeri complessi

$x^2+1=0$ Non ha soluzioni in $\mathbb{R}$

Definiamo un numero i t.c. $i^2=-1$.

i risolve l'equazione $x^2+1=0$

$i^2+1=-1+1=0$

Un numero complesso è un numero della forma

$a+ib$ con $a,b\in\mathbb{R}$. Un numero complesso è

determinato da una coppia di numeri reali.

a si chiama parte reale, b parte immaginaria.

Si possono sommare e moltiplicare tra loro

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

$$(a+ib)\cdot(c+id)=a\cdot c+a\cdot i\cdot d+i\cdot b\cdot c+i\cdot i\cdot d\cdot b=$$

$$=ac+i(ad+bc)+\underbrace{i^2}_{-1}bd=(\underbrace{ac-bd}_{\text{parte reale}})+i(\underbrace{ad+bc}_{\text{parte immaginaria}})$$

Facciamo vedere che un polinomio reale di 2° grado ha sempre 2 radici in $\mathbb{C}$.

$$x^2+6x+13=0$$

$$\underbrace{x^2+6x+9}-9+13=(x+3)^2+4=(x+3)^2-(2i)^2=$$

$$=(x+3+2i)(x+3-2i)$$

$\Rightarrow x=-3-2i;\quad x=-3+2i$ radici del polinomio

In generale

$$x^2+6x+13=0$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-52}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{i^2\cdot 4^2}}{2}=\frac{-6\pm 4\sqrt{i^2}}{2}=$$

$$=\frac{-6\pm 4i}{2}=\begin{cases}-3+2i\\-3-2i\end{cases}$$

Def: Dato $z = a+ib$ il numero complesso $\bar{z} = a-ib$ si dice coniugato di z.

Oss: Se un polinomio di grado 2 a coeff. in $\mathbb{R}$ non ha radici reali, ha sempre 2 radici in $\mathbb{C}$, coniugate fra loro.

In generale Un polinomio di grado n a coeff. in $\mathbb{R}$ ha un certo numero di radici reali + eventuali coppie di radici complesse coniugate.