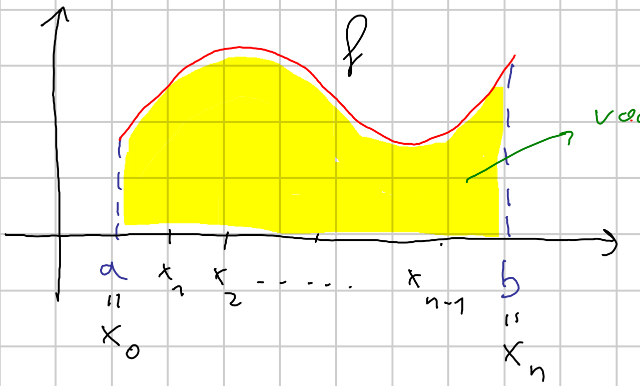
Lezione 26-11

Integrale di Riemann



vogliamo determinare l'area del sottografico di f

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata

Def: Un insieme finito di punti $A = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con

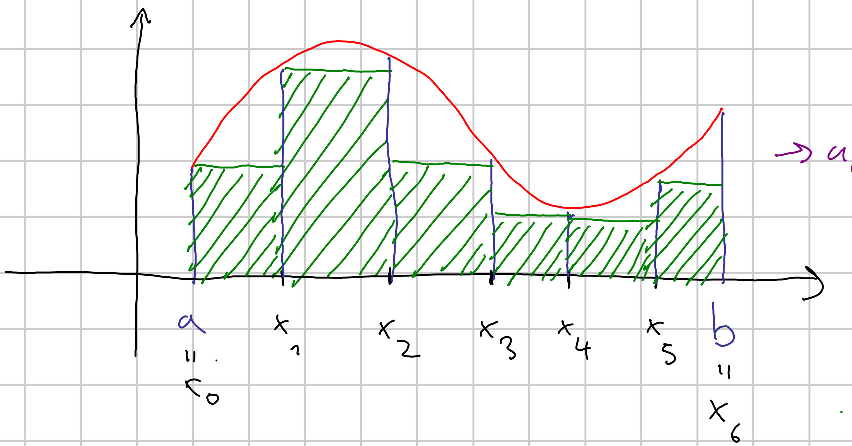
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ si dice una suddivisione di $[a,b]$.

Oss: gli intervalli $[x_n, x_{n+1}]$ non sono necessariamente della stessa grandezza, però $\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = b-a$

Def: Data A una suddivisione di $[a,b]$ definiamo

$$S'(f, A) = \sum_{j=1}^{n} \inf_{x\in[x_{j-1}, x_j]} f(x) \cdot (x_j - x_{j-1})$$ si dice

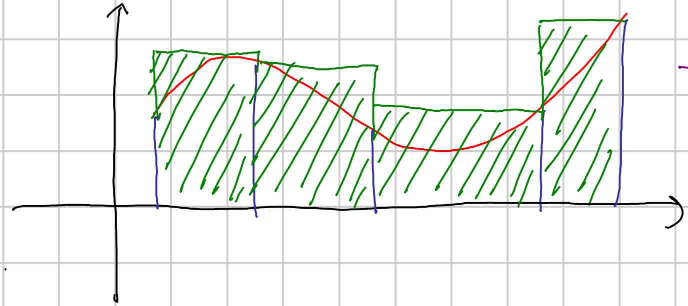
somma inferiore di f relativa alla suddivisione A.



→ approx del sottografico per difetto

Def: $S''(f,\mathcal{A}) = \sum_{j=1}^{n} \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)\cdot(x_j - x_{j-1})$; si dice

somma superiore di f relativa alla suddivisione $\mathcal{A}$.



→ approx per eccesso del sottografico

Def: $S'(f) = \sup\{S'(f, A) : A \text{ suddivisione}\}$

$S''(f) = \inf\{S''(f, A) : A \text{ suddivisione}\}$

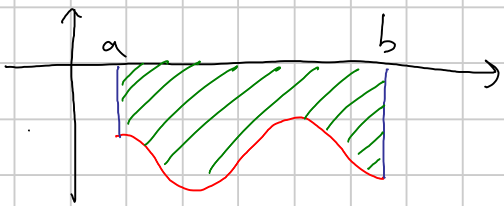
$S'(f)$ si dice somma inferiore per f.

$S''(f)$ si dice somma superiore per f.

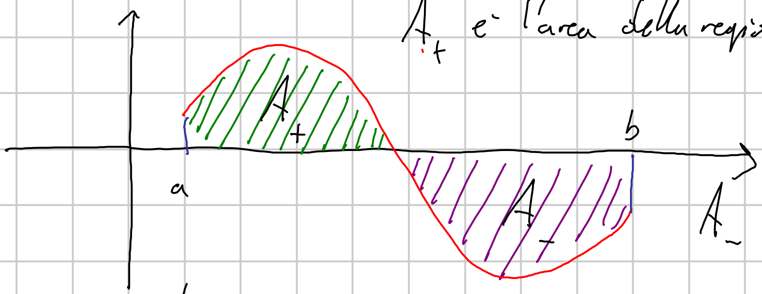
Def: Se $S'(f) = S''(f)$ allora f si dice integrabile secondo Riemann su $[a,b]$, e il valore comune di $S'(f) = S''(f)$ si dice integrale di f su $[a,b]$ e si indica con

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = S'(f) = S''(f)$$

Oss: Non è detto che f sia ≥ 0



Se $f \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) \cdot dx \leq 0$



A_+ è l'area della regione verde

A_- è l'area della regione viola.

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_+ - A_-$$

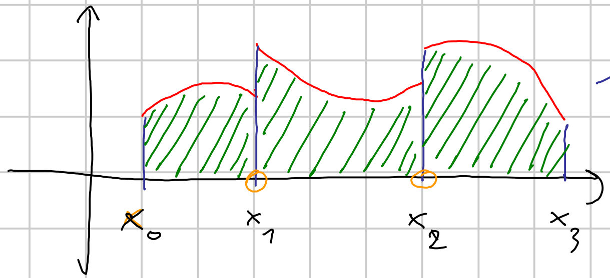
Quindi l'integrale è:

"l'area" del sottografico

contata con il segno di f.

Teorema: Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora f è integrabile.

Ci sono altre funzioni integrabili



$\rightarrow$ è "ragionevolmente" integrabile.

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} (\quad) + \int_{x_2}^{x_3} (\quad)$$

Def: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice <u>generalmente continua</u> se è limitata e ha al massimo un numero finito di punti di discontinuità. Oss. f generalmente continua su $[a,b] \Rightarrow f$ integrabile su $[a,b]$.

Es: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\qquad f : [-1,1] \to \mathbb{R}$.

f ha un solo punto di discontinuità ma non è limitata $\Rightarrow$ f non è generalmente continua.

Es: $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\quad f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$

f è generalmente continua. f è limitata $-1 \leq f(x) \leq 1 \ \forall x$.

Ha solo 0 come punto di discontinuità.

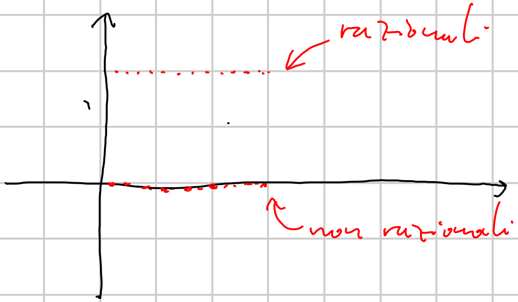
f è generalmente continua, e quindi è integrabile.

Esempio di funzione non integrabile secondo Riemann.

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

funzione di Dirichlet.



Se prendo un intervallo del tipo $[x_{j-1}, x_j]$ con $x_{j-1} < x_j$

$\sup\limits_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) = 1$ (poiché ci sono infiniti # razionali in $[x_{j-1}, x_j]$)

$\inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f$ $\quad f(x) = 0$ (" " " " " non razionali in $[x_{j-1}, x_j]$)

$\Rightarrow S'(f) = 0 \quad (S'(f, A) = 0 \ \forall A)$

$\Rightarrow S''(f) = 1 \quad (S''(f, A) = 1 \ \forall A)$

$\Rightarrow S'(f) \neq S''(f) \Rightarrow f$ non e' integrabile.

$S''(f, A) - S'(f, A)$

Se f è integrabile $\Rightarrow$ $S''(f, A) - S'(f, A)$ "tende" a 0.

(per una qualche successione di suddivisioni)

(prendendo suddivisioni via via più "fini" dell'intervallo).

È come dire che il grafico di f ha misura nulla.

Teorema: Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili su $[a,b]$

sia $k \in \mathbb{R}$. Allora $f+g$, $k \cdot f$, $|f|$ sono integrabili

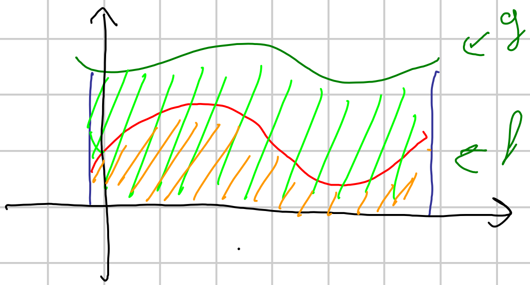
e valgono:

1) $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x) \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx + \int_a^b g(x) \cdot dx$

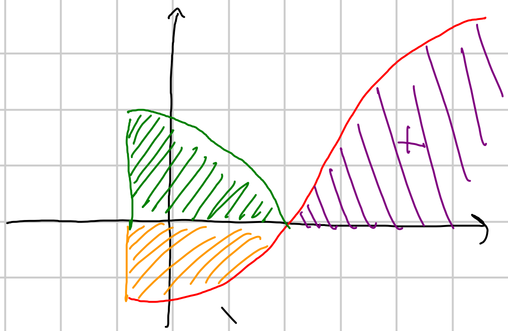
2) $\int_a^b (kf)(x)\cdot dx = k\int_a^b f(x)\cdot dx$

3) Se $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, allora

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \le \int_a^b g(x)\cdot dx$$

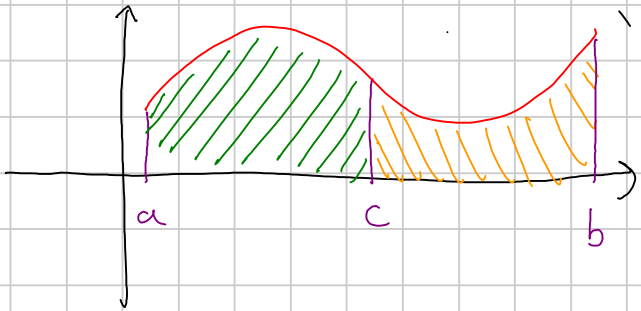


4) $\left|\int_a^b f(x)\cdot dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\cdot dx$



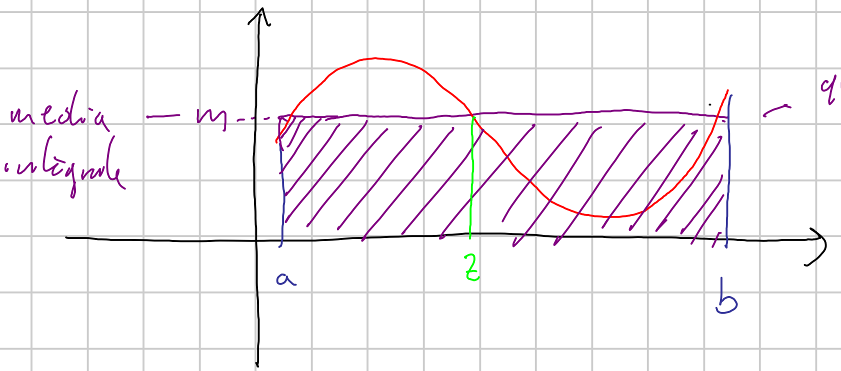
5) Se $a < c < b$ allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\cdot dx + \int_c^b f(x)\cdot dx$$



Def: Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ e' integrabile, la quantità

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$ si dice **media integrale** di f su $[a,b]$



questo rettangolo ha la stessa area del sottografico di f.

m media integrale rappresenta l'altezza di un rettangolo di base $(b-a)$ e area uguale all'area del sottografico.

Teorema della media integrale:

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile. Allora

$$\inf_{[a,b]} (f) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \cdot dx \leq \sup_{[a,b]} (f).$$

Se f è continua su $[a,b]$ allora $\exists\ z \in [a,b]$ t.c.

$$f(z) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Dim: $\forall x \in [a,b]$ risulta $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) \le f(x) \le \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

Integrando e usando la proprietà 3)

$$\int_a^b \underbrace{\inf_{[a,b]}(f)}_{\text{costante}} \cdot dx \le \int_a^b f(x)\cdot dx \le \int_a^b \underbrace{\sup(f)}_{\text{costante}} \cdot dx$$

$$\Rightarrow \inf(f)\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)\cdot dx \le \sup(f)\cdot(b-a)$$ diviso per $(b-a)$

$$\Rightarrow \inf(f) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\cdot dx \le \sup(f)$$

Se f è continua, allora $\inf(f) = \min(f)$, $\sup(f) = \max(f)$

e f assume tutti i valori intermedi, in particolare assume

come valore la media integrale (che è un valore intermedio)

cioè $\exists\, z \in [a, b] : f(z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \cdot dx$