Lezione 15-10

<u>Limite della composizione</u>

Siano $A, B \subset \mathbb{R}$, $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}$.

Sia $x_0 \in Acc(A)$. Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$,

$y_0 \in Acc(B)$, $\exists \lim_{y \to y_0} g(y)$ e vale almeno

una delle seguenti condizioni:

1) $y_0 \in B$ e g è continua in y_0

2) $\exists U \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c. $f(x) \neq y_0$ $\forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$

allora $\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{y \to y_0} g(y)$

Il fatto che valga almeno una delle condizioni 1) o 2) è necessario.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) \equiv 0$, $\quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Non valgono né la condizione 1) né la 2)

$$\lim_{x \to 0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \qquad \lim_{y \to 0} g(y) = 0 \neq \lim_{x \to 0} (g \circ f)(x) = 1.$$

Esempio: $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x^2)$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g(y) = \arctan(y)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \arctan(x^2)$

$x_0 = -\infty, \quad y_0 = \lim_{\substack{x\to-\infty \\ \shortparallel \\ x_0}} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$ \; y_0$

Siamo nel caso 2) perchè $\overset{y_0}{\overset{\shortparallel}{+\infty}} \notin B = \mathbb{R}$

$$\ell = \lim_{y \to y_0} g(y) = \lim_{y \to +\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} (g \circ f)(x) = \frac{\pi}{2}$$

Devo verificare che $\exists\, U \in \mathcal{I}(\overset{\overset{-\infty}{\shortparallel}}{x_0})$ t.c.

$x \in A \cap U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \neq y_0$.

In questo caso $y_0 = +\infty$, pertanto la condizione 2) vale per ogni intorno U.

(Il caso 2) è sempre verificato se $y_0 = +\infty$).

Questo è un teorema di cambiamento di variabile nel limite.

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan(x^2)$$

pongo $y = x^2$ (cambio di variabile)

sostituiamo y da tutte al posto della x^2.

Se $x \to -\infty$, allora $y = x^2 \to +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan(x^2) = \lim_{y \to +\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}.$$

Limiti fondamentali:

$a > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & a>1 \\ 1 & a=1 \\ 0^+ & 0<a<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x$$ poniamo $y=-x \to x=-y$

$$= \lim_{y\to+\infty} a^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{a^y} = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^y = \begin{cases} 0^+ & \text{se } a>1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ +\infty & \text{se } 0<a<1. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0^{+} & \alpha < 0 \end{cases}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$x^{\alpha} = e^{\alpha \cdot \log x} : (0, +\infty)$

$$\frac{e^{x}}{x^{10'000}} \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^{x}}{x^{\alpha}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0^{+} & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

$a, \alpha \in \mathbb{R}$

$a > 0$

Le funzioni esponenziali con base $a > 1$ tendono a $+\infty$ per $x \to +\infty$ più velocemente di qualsiasi funzione del tipo x^{a}.

Se $a = 1$ $\quad \frac{a^{x}}{x^{\alpha}} = \frac{1}{x^{\alpha}} = \frac{1}{x^{\alpha}}$ (guardare esempio precedente).

Es: $a = \frac{1}{2}$, $\alpha = -3$

$$\frac{a^x}{x^\alpha} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{x^{-3}} = \frac{x^3}{2^x} \longrightarrow 0$$

Es: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = ?$

Cambio di variabile: $y = \log x \iff x = e^y$

Se $x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$

$$* \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0^+$$

Es: $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^\beta}{x^\alpha}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$

Cambiamento di variabile $\log x = y \Rightarrow x = e^y$

Se $x \to +\infty$, allora $y = \log x \to +\infty$, Il limite diventa

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{y^\beta}{(e^y)^\alpha} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^\beta}{e^{\alpha y}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^\beta}{(e^\alpha)^y} = 0^+$$

$\to$ poiché $e^\alpha > 1$ dato che $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\log\left[(1+x)^{1/x}\right]} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\cdot\log(1+x)}$$

Poniamo $y = \frac{1}{x}\cdot\log(1+x)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\log(1+x) = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\cdot\log(1+x)} = \lim_{y\to 1} e^{y} = e$$

Nuovi casi di indeterminazione:

$f(x) > 0$

$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$ $\to$ quando può dare indeterminazione?

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log\left[f(x)^{g(x)}\right]} = e^{g(x) \cdot \log(f(x))}$$

Quando $g(x) \cdot \log(f(x))$ è indeterminato?

1) $g \to 0$ $\quad \log(f) \to +\infty$ $\quad 0 \cdot \infty$ indet

$\Downarrow f \to +\infty$

$f^g = (+\infty)^0$ – è indeterminata

2) $g \to 0 \quad \log(f) \longrightarrow -\infty \quad (-\infty)\cdot(0)$

$\Downarrow$

$f \to 0^+$

$f^g = (0^+)^0$ – è indeterminata

3) $g \to \pm\infty, \quad \log f \to 0 \quad (\pm\infty)\cdot 0$ indeterminata

$\Downarrow$

$f \to 1$

$f^g = (1)^{\pm\infty}$ — forma indeterminata

Es: $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \log x = 0^+ \cdot (-\infty)$?

$y = \log x \Leftrightarrow x = e^y$ Se $x \to 0^+$, $y \to -\infty$

$\lim_{y \to -\infty} e^y \cdot y = 0^+ \cdot (-\infty)$ forma indet

Altro cambio di variabile:

$y = -z, \quad y \to -\infty, \quad z \to +\infty$

$$\lim_{y \to -\infty} e^{y} \cdot y = \lim_{z \to +\infty} e^{-z} \cdot (-z) = \lim_{z \to +\infty} -\frac{z}{e^{z}} = -(0^{+}) = 0^{-}$$

$$\lim_{x \to 0^{+}} x^{\alpha} \cdot \log x = ? \qquad (\alpha > 0)$$

Sostituisco $y = x^{\alpha} \Leftrightarrow x = y^{1/\alpha}$.

$$x \to 0^+ \Rightarrow y \to 0^+$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = \lim_{y\to 0^+} y \cdot \log\left(y^{\frac{1}{\alpha}}\right) = \frac{1}{\alpha} \cdot \lim_{y\to 0^+} y \cdot \log y = 0$$

Es: $$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\log(x^x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\overset{\to 0^-}{x \log x}} = e^0 = 1$$

Prop: Se $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ debolmente crescente. $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$

decrescente

allora

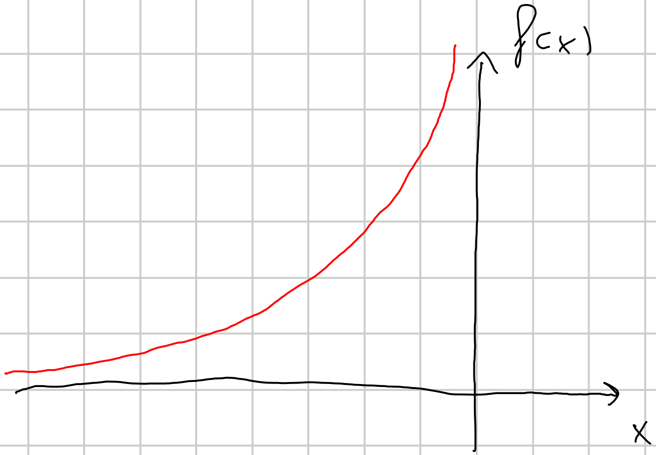
$$\exists \lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{(a,b)} f$$

inf

$$\exists \lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{(a,b)} f$$

sup

Esempio $f(x) = -\frac{1}{x}$ $f: (-\infty, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \inf_{(-\infty,0)} f = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \sup_{(-\infty,0)} f = +\infty$$

Oss: $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$

Es:

Sia $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{e^{3x^3} \cdot e^3}{e^{2x}} > e^{2x^2+x+1} \right\}$ $A \subseteq \mathbb{R}$

Dire se A è inferiormente o superiormente limitato.

$$\frac{e^{3x^3} \cdot e^3}{e^{2x}} = e^{3x^3+3-2x} > e^{2x^2+x+1} \quad (*)$$

L'esponenziale è una funzione crescente!

$$e^x > e^y \iff x > y$$

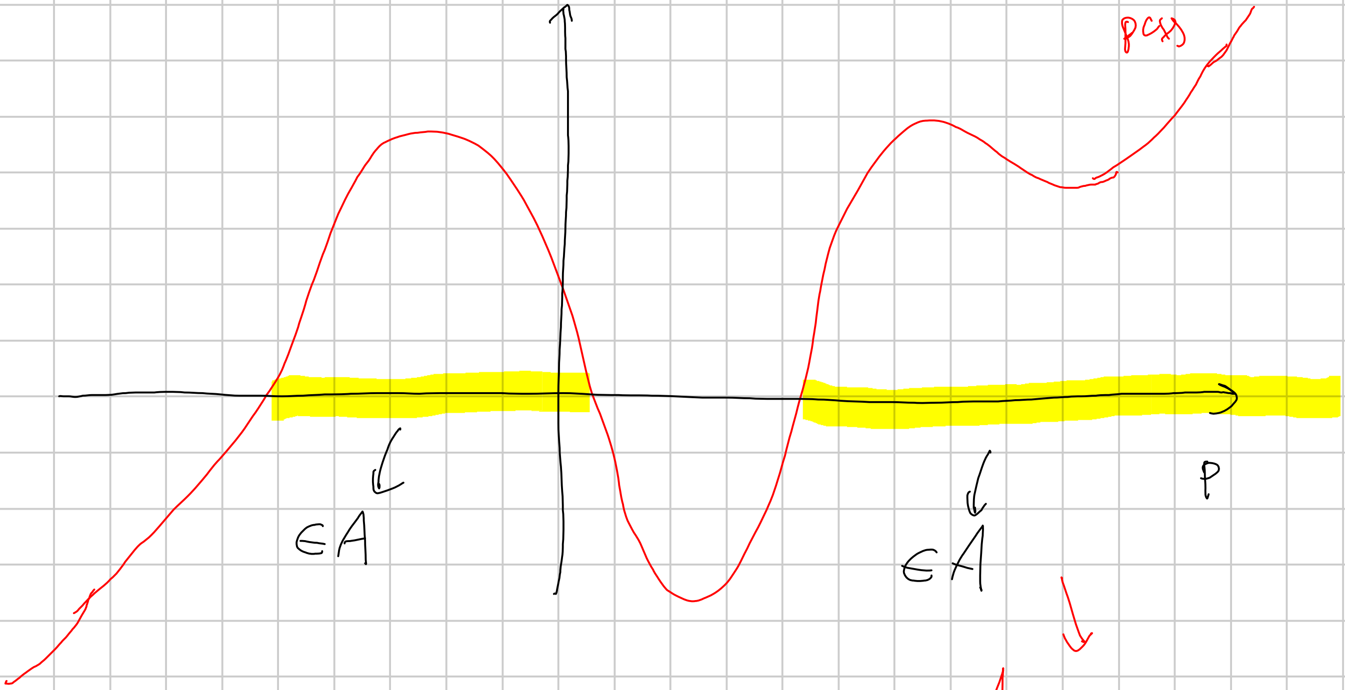
Quindi $*$ è verificata $\Leftrightarrow$ $3x^3+3-2x > 2x^2+x+1$

cioè se $3x^3-2x^2-3x+2 > 0$

$$\underbrace{3x^3-2x^2-3x+2}_{p(x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} 3x^3-2x^2-3x+2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} 3x^3-2x^2-3x+2 = -\infty$$



A non è superiormente limitato

$\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$

A è inferiormente limitato

poiché $\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$

$\exists$ U intorno di $-\infty$

t.c. $p(x) < 0$ su U

↳ Prendiamo $V = (-\infty, 0)$ - intorno di $-\infty$

allora $\exists$ U intorno di $-\infty$ t.c. $p(U) \in V$

$\exists$ $a < 0$ t.c. $x < a \Rightarrow p(x) < 0$

$\Downarrow$

$\forall x < a$, $x \notin A \Rightarrow A$ è inferiormente limitato da a.

Infinitesimi

$f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$

Def: Si dice che f è o-piccolo di g per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

- si scrive $\boxed{f(x) = o(g(x))}$

Attenzione: bisogna specificare x_0

Inoltre $o(g(x))$ specifica una classe di funzioni:

Se dico $f(x) = o(g(x))$ in x_0, vale *

se vale che $\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$