Lezione 4-12

Polinomio minimo

Sia A una matrice $n \times n$, e sia $p(x)$ un polinomio.

Ha senso calcolare $p(A)$, cioè sostituire la matrice al posto di x in $p(x)$.

Se $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

allora

$p(A) = a_n \cdot A^n + a_{n-1} \cdot A^{n-1} + \dots + a_1 \cdot A + a_0 \cdot Id$ è una matrice $n \times n$.

Domanda: esistono dei polinomi $\overset{\text{non nulli}}{\vee}$ tali che $p(A) = 0$ → matrice nulla.

Risposta SI: L'insieme delle matrici $n \times n$ è uno spazio vettoriale di dim. n^2.

Considerano $Id, A, A^2, \dots, A^{n^2}$.

Queste n^2+1 matrici non possono essere linearmente indipendenti ($n^2+1 > n^2$ = dim. di $M_{n \times n}$), quindi

$\exists\ c_0, \dots, c_{n^2} \in \mathbb{R}^2$ → non tutti nulli t.c.

$$c_0 \cdot Id + c_1 A + c_2 \cdot A^2 + \dots + c_{n^2} \cdot A^{n^2} = 0.$$

⇓

corrisponde a il polinomio $p(x) = c_0 + c_1 \cdot x + \dots + c_{n^2} x^{n^2}$

h.c. $p(A)=0$

Teorema di Hamilton-Cayley.

Sia A matrice $n \times n$, e sia $p_A(x) = \det(A - x \cdot Id)$ il suo polinomio caratteristico. Allora $p_A(A) = 0$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8.$

$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 16 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$

$$A^2 - 6A + 8\,Id = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 6 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La dim. di H.C. non è facile, tranne nel caso in cui A è diagonalizzabile

DIM: Per ipotesi esiste M invertibile t.c. $D = M^{-1} A M$

cioè $A = M D M^{-1}$

Usiamo il fatto che c'è una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ costituita da autovettori per A, cioè $A \cdot v_i = \lambda_i \cdot v_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

Poniamo $B := p(A)$, dove $p(\lambda)$ è il pol. caratteristico di A.

Chi è $B \cdot v_i$?

Se $p(\lambda) = a_n \cdot \lambda^n + \dots + a_1 \cdot \lambda + a_0$, allora

$B = a_n \cdot A^n + \dots + a_1 A + a_0 I$, e quindi:

$$B \cdot v_i = a_n \cdot (A^n \cdot v_i) + a_{n-1} \cdot (A^{n-1} \cdot v_i) + \dots + =$$

$$= a_n \cdot \lambda_i^n \cdot v_i + a_{n-1} \cdot \lambda_i^{n-1} \cdot v_i + \dots + a_1 \cdot \lambda_i \cdot v_i + a_0 \cdot v_i =$$

$$= v_i \cdot (a_n \cdot \lambda_i^n + a_{n-1} \cdot \lambda_i^{n-1} + \dots + a_0) = v_i \cdot \underbrace{p(\lambda_i)}_{\shortparallel \atop 0} = 0$$

ma $p(\lambda_i) = 0$ poiché λ_i è autovalore per A

Abbiamo dim. che $B \cdot v_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow B$ è la matrice nulla

(v_i base di $\mathbb{R}^n$).

Hamilton Cayley e matrice inversa.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, il pol. caratt. e' $\lambda^2 - 6\lambda + 8$.

per H.C. $A^2 - 6A + 8\,Id = 0$

moltiplichiamo per A^{-1}, otteniamo

$$A - 6\,Id + 8A^{-1} = 0$$

cioe' $A^{-1} = \frac{1}{8}\left(6\,Id - A\right) = \frac{3}{4}\cdot Id - \frac{1}{8}A =$

$$= \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Domanda: Come sono fatti tutti i polinomi $p(x)$ tali che $p(A) = 0$?

Risposta: Sono tutti e soli i polinomi multipli di un polinomio speciale, detto il polinomio minimo di A, perché è il polinomio di grado + basso tra quelli che si annullano in A.

Com'è fatto?

Risposta:

- Ha le stesse radici del polinomio caratteristico (quindi

gli autovalori di A), solo eventualmente di molteplicità minore (ma sempre almeno 1).
In particolare, se le radici del pol. caratt. sono tutte diverse allora il pol. minimo è = al pol. caratt.).

- Se il pol. caratt. ha radici multiple, queste compaiono nel polinomio minimo con molteplicità uguale alla massima dimensione del blocco di Jordan relativo ad esse.
In part, se A è una matrice diagonale, tutte le radici hanno molt. 1.

Esempio: A matrice 3×3, pol. caratt. $(\lambda-5)^3$.

Quali sono le possibili forme di Jordan e i relativi polinomi minimi?

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

pol. min $(\lambda-5)$ $\qquad (\lambda-5)^2 \qquad (\lambda-5)^3$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ pol. caratteristico.

Esempio: A matrice 5×5

Pol. caratt. $(\lambda-2)^2\cdot(\lambda-7)^3$

Pol. minimo $(\lambda-2)^1\cdot(\lambda-7)^2$

Trovare la forma canonica

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & & & & \\ & \boxed{2} & & & \\ & & 7 & 1 & \\ & & & 7 & \\ & & & & \boxed{7} \end{pmatrix}$$

Domanda: Come sono fatte tutte le matrici tali che $A^2 = 2A$

Riscrivo la relazione come $A^2 - 2A = 0$

Questo mi dice che il polinomio $x - 2x$ annulla A.

Quindi $x^2 - 2x = x(x-2)$ e' un multiplo del polinomio minimo.

Chi può essere il polinomio minimo?

① può essere x, in tal caso $A = 0$

② può essere $x-2$, cioè $A - 2I = 0$, cioè $A = 2I$

③ può essere $x(x-2)$.

Quindi gli unici autovalori sono 0 e 2 e tutti i blocchi sono da 1, quindi la matrice è diagonalizzabile e ha solo 0 e 2 sulla diagonale.

In generale $A = M^{-1} D M$

invertibile

diagonale

Determinare forma di Jordan e relativa base di Jordan (reale e complessa)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad p_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2+1) - (-\lambda)$$

$$= -\lambda^3 \Rightarrow 0 \text{ è autovalore e } m_a(0) = 3.$$

$m_g(0) = \dim(\operatorname{Ker} A) = 3 - rk(A) = 3 - 2 = 1 \rightarrow$ un blocco di Jordan.

Forma canonica $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di Jordan

$A(v_1) = 0 \Rightarrow v_1$ è autovettore di autovalore 0

$A(v_2) = v_1$

$A(v_3) = v_3$

$v_1 = (1, 0, 1) \in \mathrm{Ker}(A) \Rightarrow A \cdot v_1 = \underline{0}$.

v_2: Cerchiamo un vettore tale che $A \cdot v_2 = \boxed{v_1}$.

$$\left(\underbrace{\begin{matrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{matrix}}_{A}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}1\\ 0\\ 1\end{matrix}}_{v_1}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$x_2 = 1 \qquad x_1 = x_3$

posso prendere $x_1 = x_3 = 0$

Per cui $v_2 = (0, 1, 0) \qquad A \cdot v_2 = v_1$

∘ Cerco v_3 t.c. $A \cdot v_3 = v_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 1 \cdot x_2 = 0$$

$x_2 = 0 \quad x_1 - x_3 = 1 \quad x_1 = x_3 + 1 \quad x_3 = 1, \quad x_1 = 2$

$v_3 = (2, 0, 1)$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ così scelti sono base di Jordan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pol. caratt.

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 9$$

$\mathbb{Q}$

$\forall \frac{a}{b}$ è radice di $p_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ con $a_i \in \mathbb{Z}$

allora a divide a_0

b divide a_n

In questo caso un'eventuale radice razionale deve essere

uno tra $\{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$

3 è radice di $p_A(\lambda) \Rightarrow p_A(\lambda)$ è divisibile per $(\lambda - 3)$

$$p_A(\lambda) = -(\lambda - 3) \cdot (\lambda^2 + 3)$$

Autovalori: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \sqrt{3}i$, $\lambda_3 = -\sqrt{3}i$

Forma canonica complessa $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}i & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}i \end{pmatrix}$

Base di Jordan complessa

$\{v_1, v_2, w_3\}$

$v_1 \in Ker(A - 3I) = Ker \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $v_1 = (1,1,1)$

$$v_2 \in \mathrm{Ker}(A - i\sqrt{3}\, I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1-i\sqrt{3} & 2 & 0 \\ 0 & 1-i\sqrt{3} & 2 \\ \boxed{2} & 0 & 1-i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$(1-i\sqrt{3})\cdot(1+i\sqrt{3}) = 4$$

$$(1-i\sqrt{3})\cdot\frac{(1-i\sqrt{3})}{2} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1-i\sqrt{3} & 2 & 0 \\ 0 & 1-i\sqrt{3} & 2 \\ 0 & -1-i\sqrt{3} & 1-i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$R_3 = \frac{(1+i\sqrt{3})}{2}\cdot R_2$$

Soluzione $x_2 = 2 \quad x_3 = i\sqrt{3} - 1$

$$x_1\cdot(1-i\sqrt{3}) + 2\cdot x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{4}{1-i\sqrt{3}} = -1-i\sqrt{3}.$$

Autovalore per $\lambda_2 = i\sqrt{3}$ è $v_2 = (-1-i\sqrt{3}, 2, i\sqrt{3}-1)$

- Autovalore per $\lambda_3 = -i\sqrt{3}$ è $v_3 = (-1+i\sqrt{3}, 2, -i\sqrt{3}-1)$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ base di Jordan su $\mathbb{C}$.

Forma canonica reale

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = a+ib \\ \bar{\lambda} = a-ib \end{array}\right\} \text{autovalori cplx coniugati}$$

Forma reale di Jordan

$$\left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \end{array}\right)$$

$\rightsquigarrow$ blocco associato reale

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$\{w_1, w_2, w_3\}$ base di Jordan reale

$w_1 = v_1$ - 1° vettore base di Jordan cplx (relativo a autovettore reale)

$w_2 = Re(v_2) = Re((-1-i\sqrt{3}, 2, -1+i\sqrt{3})) = (-1, 2, -1)$

$w_3 = Im(v_2) = (-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3})$

$\{w_1, w_2, w_3\}$ è base di Jordan reale

Verificare che $\underset{\overset{\shortparallel}{(3,0,3)}}{A \cdot w_2} = -\sqrt{3} \cdot w_3$ $\quad$ $\underset{\overset{\shortparallel}{(-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, -\sqrt{3})}}{A \cdot w_3} = \sqrt{3} \cdot w_2$