Note Title 10/4/2019

Lezione 4-10

Note Title 10/4/2019

leone.slavich@gmail.com

Webpage: people.dm.unipi.it/slavich → pagina del corso

Ricevimento: Mercoledì 14:30.

↓

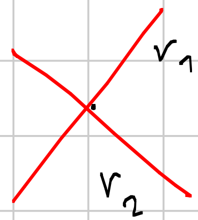
Mandare una mail almeno 24h prima.

- Reciproca posizione di due rette nel piano.

Date due rette r_1, r_2 nel piano, ci sono 3 possibilità:

- r_1 e r_2 coincidono $r_1 = r_2$ (l'intersezione sono ∞ punti).
- r_1 è parallela a r_2 (l'intersezione è l'insieme $\emptyset$)

- r_1 e r_2 sono incidenti (l'intersezione è un unico punto).



Caso 1. Se di r_1 e r_2 conosco la forma cartesiana, allora per intersecarle metto le equazioni cartesiane che le definiscono a sistema.

Esempio: $r_1: 2x+3y+5=0$

$r_2: y=-x+2$

$$\begin{cases} 2x+3y+5=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+3y+5=0 \\ -y-9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=11 \\ y=-9 \end{array}$$

$2R_2 - R_1$

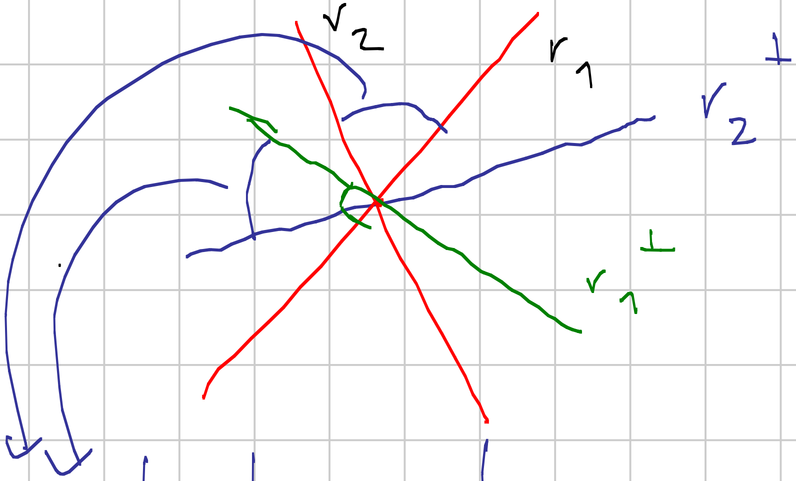
Quindi $x=11$, $y=-9$ è l'unica soluzione del sistema.

$\Rightarrow$ Le rette r_1 e r_2 sono incidenti nel punto $(11,-9)$.

- Vogliamo calcolare l'angolo tra le due rette.

Se voglio l'angolo tra r_1 e r_2 è comodo averle in forma parametrica. (Posso calcolare l'angolo tra le direzioni).

Oss: Angolo tra due rette nel piano è uguale all'angolo tra i vettori ortogonali $\perp$ alle due direzioni.



questi due angoli sono uguali

Se abbiamo una retta in forma cartesiana $ax+by+c=0$, r

il vettore perpendicolare alla direzione di r e' il vettore (a,b).

$2x+3y+5=0 \rightsquigarrow v_1=(2,3)$

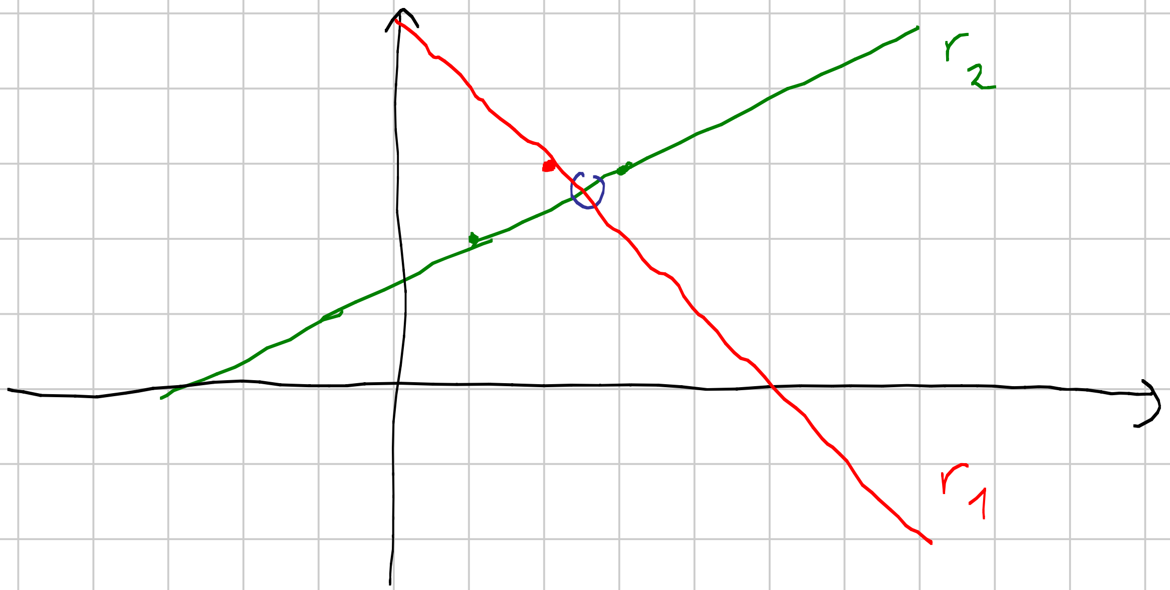
$x+y-2=0 \longrightarrow v_2=(1,1)$

$$\cos(\text{angolo tra le due rette}) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} = \frac{5}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}}$$

Caso 2: Mi viene data la forma parametrica di r_1 e r_2.

$r_1 = (2,3) + t(-1,1)$

$r_2 = (1,2) + t \cdot (2,1)$



1° modo: porto le rette in forma cartesiana e lavoro lì

2°: Scrivere le due rette in forma parametrica usando 2 parametri diversi:

parametro t.

$r_1: (2-t, 3+t)$ $\qquad$ $r_2: (1+2s, 2+s)$ - parametro s

Cerchiamo t ed s che siano soluzioni:

$$\begin{cases} 2-t=1+2s \\ 3+t=2+s \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2s+t=1 \\ -s+t=-1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2s+t=1 \\ 3t=-1 \end{cases}$$

$t = -\frac{1}{3}$, sostituendo nella 1a equaz. $s = \frac{2}{3}$

Sostituendo i valori di t ed s nella parametrizzazione trovo il punto di intersezione

$r_1 : \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3} \right)$ $r_2 : \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3} \right)$

sostituendo $t = -\frac{1}{3}$ nella param. di r_1

sostituendo $s = \frac{2}{3}$ nella param. di r_2

- Caso 3. Conosco r_1 in forma cartesiana e r_2 in forma parametrica

1° modo: le porto entrambe nella stessa forma. (meglio di no).

2° modo: $r_1 : x - 2y + 3 = 0$ $\quad r_2 = (5, 1) + t(-3, 2)$

$$r_2 : (\underbrace{5-3t}_{=x}, \underbrace{1+2t}_{=y})$$

Sostituiamo nell'equazione cartesiana di r_1 i valori di x e y nella parametrizzazione di r_2 e otteniamo:

$$(5-3t)-2\cdot(1+2t)+3=0$$

$$5-3t-2-4t+3=0 \qquad 7t=6, \quad t=\frac{6}{7}$$ → unica soluzione

↓

rette incidenti.

Per trovare l'intersezione, sostituiamo il valore trovato per t nella parametrizzazione di r_2. (Verificare che risolva l'eq. cartesiana per r_1).

Esercizio: Trovare b in modo che:

$r_1: x-y+3=0$

$r_2: (-1,3)+t(1,b) \rightsquigarrow (\underset{x}{\underset{\shortparallel}{-1+t}}, \underset{y}{\underset{\shortparallel}{3+bt}}) =$

siano parallele.

Sostituendo troviamo $-1+t-(3+bt)+3=0$ Vogliamo che questa non abbia soluzioni in t

$-1+t-\cancel{3}-bt+\cancel{3}=0 \rightsquigarrow$ prendiamo $b=1$ e otteniamo $-1=0$ (non ha soluzioni)

Per $b=1$ r_1 e r_2 sono //.

Altro modo

→ trovare la direzione di r_2: $(1,b)$

" " " " r_1: $(1,1)$ → (calcolata dalla forma implicita).

v_1 "

$(1,-1)$ è direzione ortogonale a r_1 $\quad$ v_2 " $(1,1)$ è ortogonale a v_1 $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

⇒ $v_2 = (1,1)$ è ~~una~~ direzione di r_1.

Affinché le rette siano // è necessario $(1,b)$ e $(1,1)$ siano multipli l'uno dell'altro. In questo caso succede se e solo se $b=1$.

$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vettore ortogonale è dato da $v' = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

RETTE NELLO SPAZIO.

Rette nello spazio si trattano bene in forma parametrica.

- Rette per l'origine: sono tutti i multipli di un vettore $\vec{v} \neq 0$ in $\mathbb{R}^3$.

$\{ t \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ non nullo} \}$.

- Retta per un punto qualsiasi: basta cambiare il p.to di partenza

Esempio: $(1,0,2)+t\cdot(5,-1,6)=(1+5t,-t,2+6t)$

parametro

In generale sarà del tipo $\vec{w}+t\cdot\vec{v}$ $\quad \vec{v}\in\mathbb{R}^3$, $\vec{v}\neq 0$

p.to di partenza

direzione

Esercizio: Scrivere la retta r nello spazio passante per $(5,1,-3)$ e $(2,4,-3)$

$P=(5,1,-3)$, $Q=(2,4,-3)$

$r: P+t\cdot(Q-P)=$

$= (5,1,-3) + t(-3,3,0)$

$= (5,1,-3) + t(-1,1,0)$ – cambiato il rappresentante delle direzioni

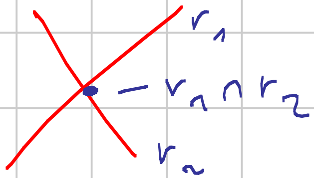
$= (2,4,-3) + t(-1,1,0)$ – cambiato il punto di partenza.

vanno bene sono la stessa retta

• Mutua posizione di due rette r_1 e r_2 nello spazio.

1) coincidenti $r_1 = r_2$ (infinite intersezioni)

2) incidenti



(un'unica intersezione)

3) parallele  (nessuna $\cap$, direzioni "multiple")

4) Sghembe  (nessuna $\cap$, direzioni diverse (non multiple).

$$\text{Esempio: } \overset{r_1}{(2+t,\,-1,\,3-t)} = \overset{r_2}{(2,1,-1)+t(5,1,3)}$$

$$(2+t,\,-1,\,3-t) = (2,-1,3)+t(1,0,-1)$$

direzioni non sono multipli

$$\begin{cases} 2+t = 2+5\cdot s \\ -1 = 1+s \\ 3-t = -1+3s \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 5s-t=0 \\ s=-2 \\ 3s+t=4 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} t=-10 \\ s=-2 \\ t=10 \end{cases}$$

non ha soluzioni

$\Downarrow$

r_1, r_2 sono sghembe.

Esempio: $r_1 : (5-t, 2t, 1+3t)$ $\quad r_2 : (t, -t, a t)$

dipende da $a \in \mathbb{R}$.

passa per l'origine.

Trovare (se esistono) valori di a per cui r_1 e r_2 sono incidenti.

$$\begin{cases} 5 - t = s \\ 2t = -s \\ 1 + 3t = a \cdot s \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} s + t = 5 \\ s + 2t = 0 \\ a \cdot s - 3t = 1 \end{cases}$$

$R_2 - R_1$: $t = -5 \quad s = 10$

sostituendo nella 3a equaz.

ottengo $a \cdot 10 + 15 = 1$

$\rightsquigarrow 10 \cdot a = -14 \qquad a = -\frac{7}{5}$

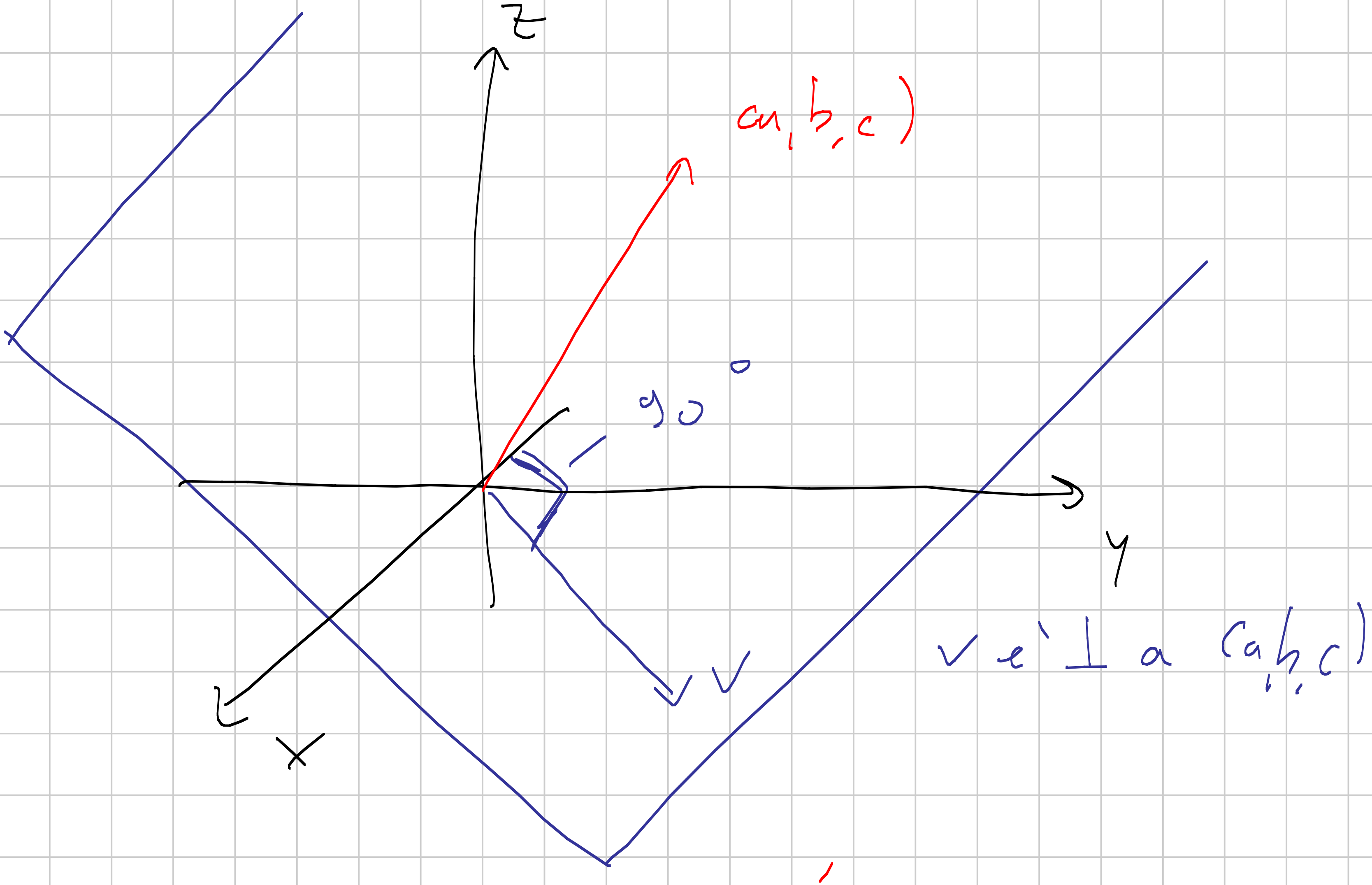
Piani nello spazio: $\longrightarrow$ Forma cartesiana
$\longrightarrow$ Forma parametrica.

Piani passanti per l'origine.

Eq. cartesiana: $ax + by + cz = 0$ $\quad (a, b, c) =$ vettore ortogonale al piano

$a, b, c \in \mathbb{R}$ non tutti nulli

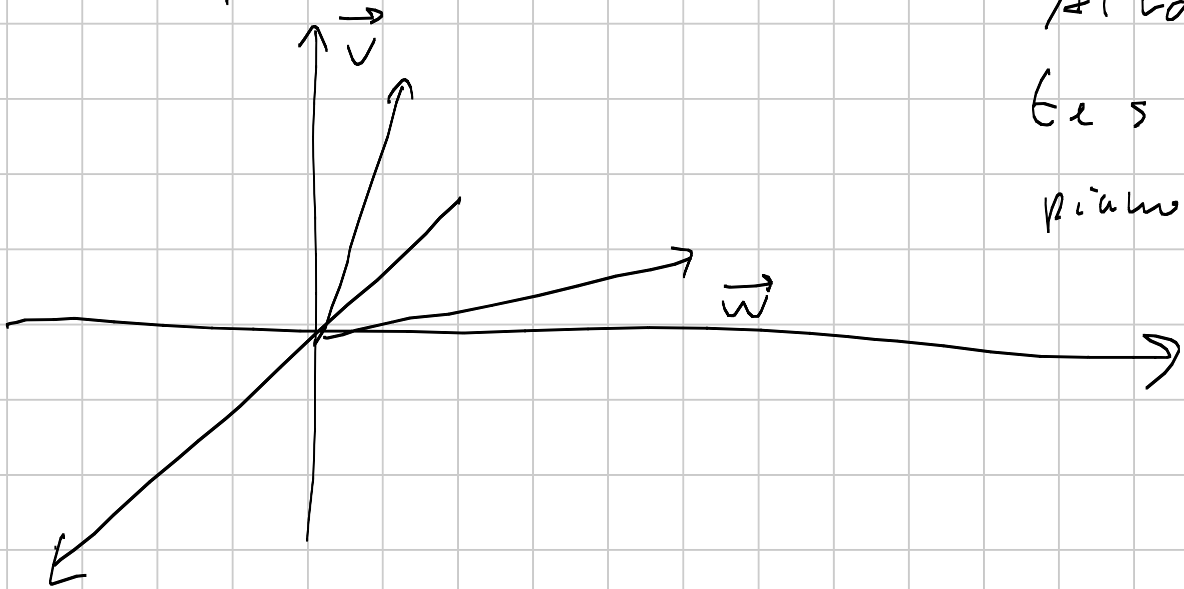
Sono i vettori (x, y, z) nello spazio che sono $\perp$ al vettore (a, b, c) non nullo dato



z
(a, b, c)
90°
y
x
v
v
v e' ⊥ a (a, b, c)

Eq. parametrica di un piano per l'origine.

$t \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$, dove $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono vettori di $\mathbb{R}^3$ non nulli e non multipli l'uno dell'altro.



Al variare di t e s otterrò il piano passante per l'origine, $\vec{v}$, e $\vec{w}$

Piani che non passano per l'origine.

Eq. cartesiana $ax+by+cz+d=0$ → passa per l'origine $\Leftrightarrow d=0$.

Eq. parametrica: $\vec{u} + t\cdot\vec{v} + s\vec{w}$

punto di partenza

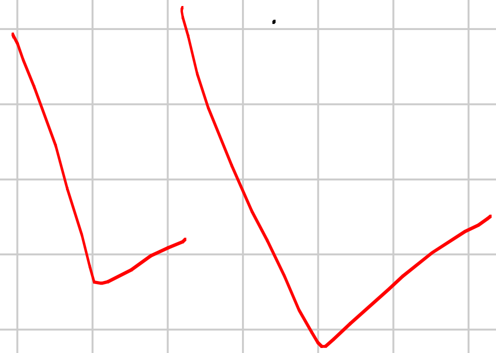
"due direzioni nello spazio che generano il piano a partire da $\vec{u}$"

Mutua posizione di due piani nello spazio:

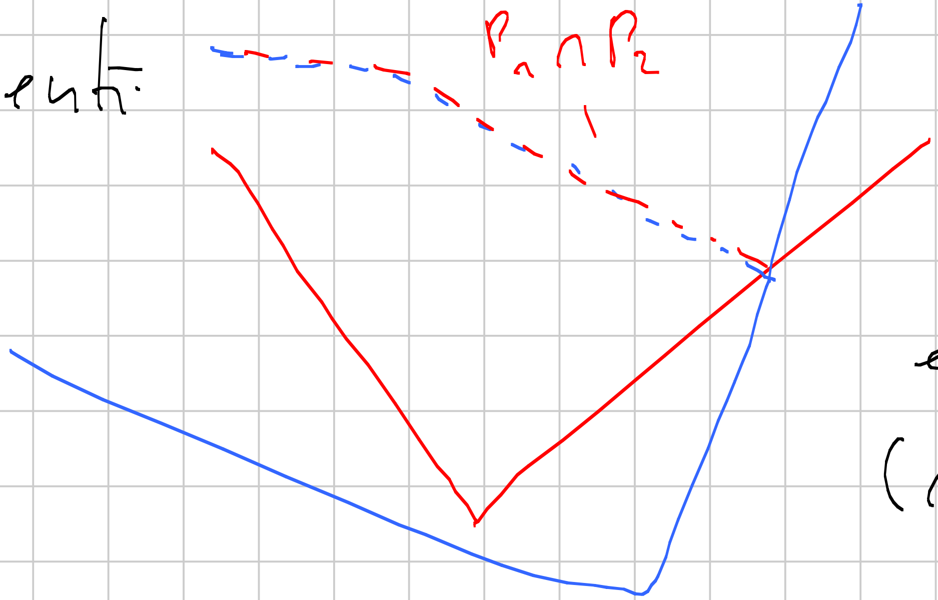
- Dati P_1 e P_2 piani in $\mathbb{R}^3$ questi possono essere

1) Coincidenti ($P_1 = P_2$, infinite intersezioni, dipendente da 2 parametri)

2) Paralleli ($P_1 // P_2$, nessuna intersezione)



3) Piani incidenti



$P_1 \cap P_2$ è data da ∞ punti ed è una retta ($\cap$ si parametrizza con 1 parametro).