Lezione 25-10

Note Title 10/25/2019

Esercitazione: cambiamenti di base

V sp. vettoriale $\dim(V) = n$

$B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$, $B_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$

se $v \in V$ allora v si scrive in modo unico

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = y_1 w_1 + \dots + y_n w_n$$

M matrice di cambiamento di base da B_1 a B_2 è

la matrice $n \times n$ tale che $M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \forall v \in V$

coordinate rispetto alla base B_1

coordinate di v rispetto a B_2.

Esercizio: $V = \mathbb{R}^2$, $B_0 = \{ \underset{v_1}{(1,0)}, \underset{v_2}{(0,1)} \}$, $B_1 = \{ \underset{w_1}{(2,3)}, \underset{w_2}{(1,5)} \}$

$M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ La prima colonna ha come coefficienti le coordinate di v_1 rispetto a B_2

La seconda colonna ha come coeff. le coordinate di v_2 rispetto a B_2

Vogliamo scrivere $v_1 = a w_1 + b w_2$, cioè $(1,0) = a \cdot (2,3) + b \cdot (1,5)$

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ 3a + 5b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + b = 1 \\ -7a = -5 \end{cases} \rightarrow a = \frac{5}{7} \nearrow b = 1 - 2a = 1 - \frac{10}{7} = -\frac{3}{7}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$ – matrice di cambiamento di base

- Per $v_2 = (0,1)$ otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 3a + 5b = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ -7a = 1 \end{cases} \quad a = -\frac{1}{7} \quad b = -2a = \frac{2}{7}$$

verificare che

$v_2 = a \cdot w_1 + b \cdot w_2$

$V=\mathbb{R}^2 \qquad B_1=\{\underset{v_1}{\underset{\parallel}{(2,3)}},\underset{v_2}{\underset{\parallel}{(1,5)}}\} \qquad B_2=\{\underset{w_1}{\underset{\parallel}{(-3,4)}},\underset{w_2}{\underset{\parallel}{(1,-3)}}\}$

1a colonna:

Cerchiamo a, b t.c. $v_1 = a w_1 + b w_2$

$$\begin{cases} -3a+b=2 \\ 4a-3b=3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -3a+b=2 \\ -5a=9 \end{cases} \longrightarrow a=-\frac{9}{5} \longrightarrow b=2+3a=2-\frac{27}{5}=-\frac{17}{5}$$

2a colonna:

$$\begin{cases} -3a+b=1 \\ 4a-3b=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3a+b=1 \\ -5a=8 \end{cases} \rightarrow a=-\frac{8}{5} \rightarrow b=1+3a=1-\frac{24}{5}=-\frac{19}{5}$$

N matrice cambiamento di base

$$N=\begin{pmatrix} -\frac{9}{5} & -\frac{8}{5} \\ -\frac{17}{5} & -\frac{19}{5} \end{pmatrix}$$

Oss: Se M è la matrice di cambio di base da B_0 a B_1; $\xrightarrow{\text{partenza}}$ $\xrightarrow{\text{arrivo}}$

e N è la matrice di cambio di base da B_1 a B_2

allora la matrice di cambio base da B_0 a B_2 è $N \cdot M$

matrice 2° cambio di base

matrice 1° cambio base

$$V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x] = \{ a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}.$$

Base di $V = \{1, x, x^2\}$

$3 + 4x - 2x^2$ ha coordinate $(3, 4, -2)$ rispetto alla "base canonica".

$$B_1 = \{ \underset{v_1}{x^2}, \underset{v_2}{x^2 + x}, \underset{v_3}{x^2 + x + 1} \}$$

$$B_2 = \{ x^2 + x, x^2 + x + 1, x \}$$

verificare che sono basi.

1a colonna: $x^2 = a(x^2+x) + b(x^2+x+1) + cx \quad (a,b,c) = (1,0,-1)$

poiché $x^2 = (x^2+x) - x$

$$x^2 = (x^2+x) - x = 1\cdot(x^2+x) + 0\cdot(x^2+x+1) - 1\cdot x$$

2a colonna $x^2+x = a(x^2+x) + b(x^2+x+1) + c\cdot x \quad (a,b,c) = (1,0,0)$

3a colonna $x^2+\cancel{x}+1 = a(x^2+x) + b(x^2+x+1) + c\cdot x \quad (a,b,c) = (0,1,0)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prendiamo v_i

i-esimo vettore della base di partenza.

Le coordinate di v_i rispetto alla base di partenza sono $(0 \ldots 0, 1, 0 \ldots 0)$.

M matrice di cambio base $\quad M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}$ – i-esima colonna di M

- Somme, intersezioni e determinazione di basi

X sp. vett. V, W sottospazi vettoriali di X.

Determinare $V+W$, $V\cap W$, calcolarne le dimensioni e calcolarne basi.

- $X = \mathbb{R}^3$, $V = \mathrm{Span}\left\{ \overset{v_1}{\overset{\shortparallel}{(1,2,3)}} \right\}$, $W = \mathrm{Span}\left\{ \overset{w_1}{\overset{\shortparallel}{(1,1,0)}}, \overset{w_2}{\overset{\shortparallel}{(0,2,1)}} \right\}$

$\dim V = 1 \quad \dim W = 2$

Formula di Grassmann: $\dim(V+W) = \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\dim(V)} + \underset{\overset{\shortparallel}{2}}{\dim(W)} - \dim(V\cap W)$

2 casi possibili: A) $\underset{\overset{\shortparallel}{W}}{\dim(V+W)} = 2$ allora $\underset{\overset{\shortparallel}{V}}{\dim(V\cap W)} = 1 \rightsquigarrow$ caso in cui $V \subset W$

B) $\underset{\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}^3}}{\dim(V+W)} = 3$, allora $\underset{\overset{\shortparallel}{\{\underline{0}\}}}{\dim(V\cap W)} = 0$

Verifichiamo se $v_1 \in W$, cioè verifichiamo se $v_1 \in \mathrm{Span}\{w_1, w_2\}$

Cerchiamo a, b t.c. $v_1 = a w_1 + b w_2$.

$(1,2,3) = a(1,1,0) + b(0,2,-1) \iff$

$$\begin{cases} a = 1 \\ a+2b = 2 \\ -b = 3 \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} a=1 \\ a+2b = -5 \neq 2 \\ b=-3 \end{matrix}\right\}$$

Il sistema non ha soluzioni

Quindi $v_1 \notin \operatorname{Span}\{w_1, w_2\} = W$

Siamo nel caso B) $\quad V \cap W = \{\underline{0}\} \quad V + W = \mathbb{R}^3$

$$\text{base } \{\underbrace{w_1, w_2}_{\text{base di } W}, \underbrace{v_1}_{\text{base di } V}\}$$

- $X = \mathbb{R}^4 \quad V = \operatorname{Span}\{\underset{v_1}{(0,0,1,1)}, \underset{v_2}{(0,1,1,0)}, \underset{v_3}{(1,1,0,0)}\}$

$$W = \operatorname{Span}\{\underset{w_1}{(1,0,1,0)}, \underset{w_2}{(0,1,0,1)}\}$$

$\dim V = 3$, $\dim W = 2$ $\dim X = 4$

$V + W = \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2\}$ $\quad w_1 \overset{?}{\in} \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$

sì

Cerchiamo a, b, c t.c. $w_1 = a v_1 + b v_2 + c v_3$

$$\begin{cases} c = 1 \\ b + c = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$a = 0$

$a = 0$,

$c = 1$

2a equaz. $b = -1$

3a equaz. $b = 1$

$\rightarrow$ non c'è soluzione

$\Rightarrow w_1 \notin \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$

$$\mathrm{Span}\{v_1, v_2, w_3, w_1\} = \mathbb{R}^4 = X \Rightarrow V + W = X = \mathbb{R}^4.$$

$$\dim(V+W) = 4 = \underset{\substack{\shortparallel \\ 3}}{\dim(V)} + \underset{\substack{\shortparallel \\ 2}}{\dim(W)} - \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{\dim(V \cap W)}$$

- Caso V in forma cartesiana, W dato da base.

$$X = \mathbb{R}^3, \quad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y = z\}, \quad W = \mathrm{Span}\{\underset{w_1}{(1,-1,1)}, \underset{w_2}{(0,1,0)}\}$$

$\dim V = 2 \qquad \dim W = 2.$

Metodo 1) Ricondursi al caso precedente: Calcoliamo una base di V, ad esempio

$$\{ \underset{\substack{\shortparallel \\ v_1}}{(1,0,2)}, \underset{\substack{\shortparallel \\ v_2}}{(0,1,3)} \}$$

Metodo 2): $w_1 \notin V$, $w_2 \notin V$ $\longrightarrow$ non significa che $V \cap W = \{ \underline{0} \}$

$$\dim(V+W) = \underset{\overset{\shortparallel}{2}}{\dim(V)} + \underset{\overset{\shortparallel}{2}}{\dim(W)} - \dim(V\cap W)$$

caso A) $\dim(V+W) = 3$ e quindi $\dim(V\cap W) = 1$

B) $\dim(V+W) = 2$ $\dim(V\cap W) = 2$.

Caso B) si verifica $\Leftrightarrow V = W$ → ma non succede! Poiché $w_1 \notin V$

Siamo nel caso A) poiché $w_1 \notin V$, $w_2 \notin V$

$\dim(V \cap W) = 1$. Vogliamo trovare una base di $V \cap W$.

Cerchiamo a, b non entrambi nulli tali che $a w_1 + b w_2 \in V$

$$a w_1 + b w_2 = (a, b-a, a) \in V \iff$$

$$a \cdot (1, -1, 1) + b \cdot (0, 1, 0) = (a, b-a, a)$$

$$2a + 3(b-a) = a \iff 2a + 3b - 3a - a = 0 \iff 3b - 2a = 0$$

Trovo soluzione non nulla $(a, b) = (3, 2)$

$$V \cap W = \text{Span}\{3 w_1 + 2 w_2\} = \text{Span}\{(3, -1, 3)\}$$

- Se avete una V in forma cartesiana
  W in forma cartesiana } → calcolare una base e ricondursi al caso precedente.

Dimensione di nucleo e immagine di applicazioni lineari.

Se $f: V \to W$ è applicazione lineare tra V e W sp. vettoriali:

$$\underset{\substack{\cap \\ V}}{\mathrm{Ker}(f)} = \{ v \in V \mid f(v) = \underset{\substack{\text{vett.} \\ \text{nullo di} \\ W}}{\underline{0}} \}, \quad \mathrm{Im}(f) = \{ w \in W \mid \exists\, v \in V \text{ t.c. } f(v) = w \}.$$

Formula:
$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

• $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi(x,y) = (x-y,\ 2x+y)$ $\quad \varphi$ è lineare.

$(x,y) \in \operatorname{Ker} \varphi \iff \begin{cases} x-y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$ non ha soluzioni non nulle.

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) = 0$ — φ è iniettiva

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = 2$ — φ è surgettiva

(In generale): Dati $\varphi : V \to W$.

Se $\dim V \gneq \dim W$ φ non può essere iniettiva

Se $\dim V \lneq W$ φ non può surgettiva

- Se $\dim V = \dim W$ φ è iniettiva $\Leftrightarrow$ φ è surgettiva

↳ Segue dalla formula per dimensione di nucleo e immagine.

- $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi(x,y,z) = (x-y,\, y-z,\, z-x)$.

$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-x=0 \end{cases}$ Ha soluzione $(1,1,1)$

$x = y = z$ In questo caso $(x, y, z) \in \ker\varphi \iff (x, y, z) = (\lambda, \lambda, \lambda)$ per $\lambda \in \mathbb{R}$

$\mathrm{Dim}(\ker\varphi) = 1$

$\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}\,\varphi) = 2$

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Span}\left\{ \varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \varphi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \varphi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \right\}}_{\text{non sono lin. indip.}}$$

Base di $\mathrm{Im}(\varphi)$ sarà data da (ad esempio) $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$

In generale, data $f: V \to W$ lineare e $\{v_1 \dots v_n\}$ base di V

$Im(f) = Span\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$

generano $Im(f)$.