Lezione 15-11

Def: Matrici ortogonali:

Sia A una matrice $n \times n$, allora sono equivalenti

(1) Le colonne di A sono ortonormali

(2) Le righe di A sono ortonormali

(3) $A^{-1} = A^t$ $(AA^t = Id)$ (inversa = trasposta).

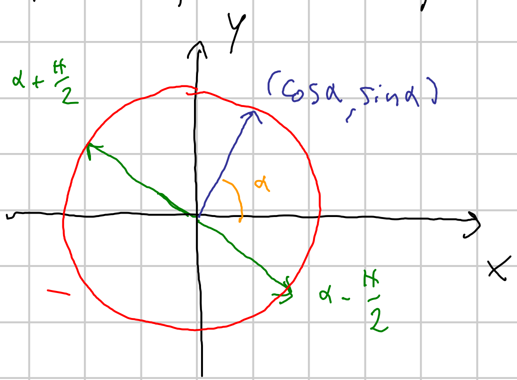
In questi casi A si dice ortogonale

Esercizio: Caratterizzare le matrici 2×2 ortogonali.

A 2×2 ortogonale.

La prima riga deve un vettore di norma 1.

Se $\underset{\substack{\| \\ (\cos\alpha,\, \sin\alpha)}}{(x, y)}$ sono le sue componenti, allora $x^2+y^2=1$.



La seconda riga deve essere
un vettore di norma 1
e ortogonale alla prima riga.

Ci sono due possibilità:

- $\alpha+\frac{\pi}{2} \longrightarrow$ $\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$

  $\sin(\alpha+\frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$

- $\alpha - \frac{\pi}{2} \longrightarrow \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin\alpha$

  $\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos\alpha$

$$A := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$

rappresenta una rotazione nell'origine

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$\det(A) = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$

rotazione + riflessione

isometrie di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2 Trovare esempi di matrici 3x3 ortogonali che non siano "banali" $\rightarrow \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$

Idea: Prendere una base a caso di $\mathbb{R}^3$ e ottenere una base ortonormale usando G.S. Usare tale base per scrivere le righe della matrice.

$v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 0, 0)$, $v_3 = (1, 1, 0)$ - sono effettivamente una base di $\mathbb{R}^3$?

Applichiamo G.S.

$w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} \cdot w_1 = (1,0,0) - \frac{1}{2}(1,0,1) = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

Volendo
$w_2 = (1,0,-1)$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 =$$

$$= (1,1,0) - \frac{1}{2}(1,0,1) - \frac{1}{2}(1,0,-1) = (0,1,0)$$

Conclusione $w_1 = (1, 0, 1)$, $w_2 = (1, 0, -1)$, $w_3 = (0, 1, 0)$

Sono base ortogonale (prod. scalari a 2 a 2 sono nulli).

Per avere base ortonormale li dividiamo per la loro norma

$$w_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad w_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad w_3' = (0, 1, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per costruzione l'inversa è la trasposta

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Osservo che le righe di A sono ortogonali ma non ortonormali

$\Rightarrow A \cdot A^t$ e' diagonale

$$A \cdot A^t = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \boxed{1 \quad 0 \quad -1} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A^t} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per ottenere l'identità a dx e' sufficiente moltiplicare le colonne della matrice A^t per $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$ Verificare che $A \cdot A^{-1} = I_3$

Esercitazione:

Studiare il numero di soluzioni del sistema dato al variare degli (eventuali) parametri dati:

$$\begin{cases} x + a y = 2 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

parametro $a \in \mathbb{R}$.

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{array} \right)$$

Soluzioni esistono $\Leftrightarrow rk(A) = rk(A')$

In tal caso lo spazio delle soluzioni dipendono da

1^a osservazione

$rk(A') = 2$ sempre

(non dipende da a).

$n - rk(A)$ parametri

↳ numero di incognite

$\overset{\shortparallel}{\#}$ di colonne di A.

Il sistema ha soluzione se e solo se $rk(A) = rk(A') = 2$.

in tal caso la soluzione è unica.

- $rk \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}_{A} = 2 \Rightarrow det(A) \neq 0$

↳ $-3 - 2a \neq 0$

$a \neq -\frac{3}{2}$

- $a \neq -\frac{3}{2}$ il sistema ha un'unica soluzione.
- $a = -\frac{3}{2}$ il sistema non ha soluzioni.

Esercizio 2:

$$\begin{cases} 2x + 3y = b \\ x - ay = 7 \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & b \\ 1 & -a & 7 \end{array}\right)$$

1a oss: Se $\det(A) \neq 0$, allora per forza $rk(A) = rk(A') = 2 \rightarrow$ in tal caso esiste sicuramente un'unica soluzione.

$rk(A) = 2 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow -2a - 3 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -\frac{3}{2}$.

- Se $a = -\frac{3}{2}$ otteniamo $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & b \\ 1 & 3/2 & 7 \end{array}\right)$

$rk(A) = 1$

- Se $rk(A') = 2$ il sistema non ha soluzioni $\quad b \neq 14$
- Se $rk(A') = 1 = rk(A)$ il sistema ha soluzioni dipendenti da 1 parametro.

$\Rightarrow b = 14$

$\Rightarrow$ (3a colonna è 7 volte la 1a)

3): $2x + y = 5$

$x - y = a$

$x + by = 3$

$$\left(\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & b & 3 \end{array}\right)$$

Fatto 1: per ogni a e b si ha che $\operatorname{rank}(A') \geq 2$.

Fatto 2: $\operatorname{rank}(A) = 2$

$\det(A') = 0$

Il sistema ha soluzioni $\iff rk(A') = rk(A) = 2$.

Se $rk(A') = 3$ il sistema non ha soluzioni $\iff \det(A') \neq 0$

$\det(A')$ = polinomio in a ~~e b~~,. Discutere quando si annulla o meno.

Esempio 4)

$$\begin{cases} x+y-2z=1 \\ ax+by+3z=8 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & \boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ b & 3 \end{matrix}} & 1 \\ a & & 8 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ a & b & 3 & 8 \end{array}\right) \qquad rank(A') = 2$$

Il sistema ha soluzioni $\Leftrightarrow$ $rank(A)=2$.

Per avere $rk(A)=2$ è sufficiente trovare sottomatrice 2x2 con det $\neq 0$.

- $3+2b \neq 0$, $b \neq -\frac{3}{2}$ ok abbiamo soluzione.

- $3+2a \neq 0$, $a \neq -\frac{3}{2}$ ok abbiamo soluzioni

L'unico caso in cui possiamo non avere soluzioni è quello in cui $a = b = -\frac{3}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 3 & 8 \end{array}\right)$$

$\hookrightarrow$ rango 1. $\left(R_2 = -\frac{3}{2} R_1\right)$

Esercizio: Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c.

$$f(\underbrace{1,1,0}_{v_1}) = (\underbrace{0,1,0}_{w_1})$$

$$f(\underbrace{1,0,0}_{v_2}) = (\underbrace{2,1,3}_{w_2})$$

$$f(\underbrace{1,1,1}_{v_3}) = (\underbrace{2,-1,3}_{w_3})$$

Oss: f lineare che soddisfi tali condizioni esiste ed è unica poiché $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$.

$\downarrow$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

L'immagine di f è data dallo $\mathrm{Span}\{f(v_1), f(v_2), f(v_3)\}$

$$\{w_1, w_2, w_3\}$$

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \end{array}\end{array} - \det = 0$$

rango 2

$\dim(\mathrm{Span}(w_1, w_2, w_3)) = 2$

$\dim(\mathrm{Im}(f))$ $\{w_1, w_2\}$ sono una base per $\mathrm{Im}(f)$.

∘ $Ker(f)$ $\quad$ $\dim(Ker(f)) = 1$

Per trovare una base per $Ker(f)$, chiediamo

$$f(av_1+bv_2+cv_3)=0$$

$$\|$$

$$a\cdot f(v_1)+b\cdot f(v_2)+c\cdot f(v_3) = a\cdot w_1+b\cdot w_2+cw_3 = 0$$

Notiamo che $w_3 = w_2 - 2w_1$ $\qquad$ $-2w_1+w_2-w_3=0$

$$2w_1-w_2+w_3=0$$

Una base di $Ker(f)$ è data

base di $Ker(f)$.

$$2v_1-v_2+v_3 = 2\cdot(1,1,0)-(1,0,0)+(1,1,1) = (2,3,1)$$

Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}}_{w_1 \quad w_2 \quad w_3} = B$$

$\rightarrow$ Rappresenta f dalla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ in partenza alla base canonica in arrivo.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{v_1 \quad v_2 \quad v_3} = M$$

$\rightarrow$ matrice di cambio base dalla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ alla base canonica.

La matrice di cambio base da base canonica a $\{v_1, v_2, v_3\}$ è

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice richiesta è $B \cdot M^{-1}$