Lezione 11-12

Trasformazioni affini e isometrie

Prop: La composizione di due trasformazioni affini e' affine

Dim: $f(x) = A_1 \cdot x + b_1 \qquad g(x) = A_2 \cdot x + b_2$

$$g(f(x)) = A_2 \cdot (f(x)) + b_2 = A_2 (A_1 \cdot x + b_1) + b_2 =$$

$$= \underbrace{A_2 \cdot A_1}_{\text{parte lineare}} \cdot x + \underbrace{A_2 \cdot b_1 + b_2}_{\text{vettore (parte di traslazione)}}$$

parte lineare.

Prop: L'inversa di una trasformazione affine (se esiste) e' affine.

Data $f(x) = A_1 x + b_1$ affine, f è invertibile $\iff \det A_1 \neq 0$

A_1 è invertibile

Supponiamo $f(x) = A_1 x + b_1$ sia invertibile.

Cerchiamo $g(x) = A_2 x + b_2$ t.c. $g(f(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

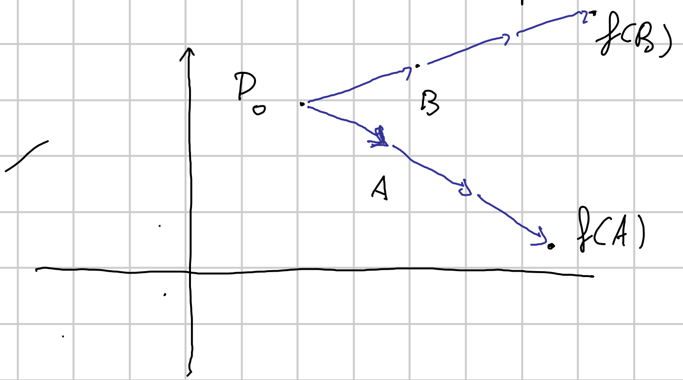
$g(f(x)) = A_2 \cdot A_1 x + A_2 b_1 + b_2 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \iff$

$$\begin{cases} A_2 A_1 = Id \\ A_2 b_1 + b_2 = 0 \text{ - vettore nullo.} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A_2 = A_1^{-1} \\ b_2 = -A_2 \cdot b_1 = -A_1^{-1}(b_1) \end{array}$$

Oss: La composizione di due isometrie è un isometria

L'inversa di un'isometria è un'isometria.

Es: Scrivere l'omotetia del piano con centro $\overset{P_0}{(2,3)}$ e fattore 3.



$$P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow 3(P-P_0) \longrightarrow 3(P-P_0)+P_0 = 3P-3P_0+P_0 = 3P-2P_0$$

porto P_0 nell'origine tramite traslazione lungo il vettore $-P_0$

omotetia di fattore 3 nell'origine

traslo lungo P_0

$$(x,y) \xrightarrow{f} (3x,3y)-2(2,3) = (3x-4,\ 3y-6)$$

$$\parallel$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{parte lineare}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}}_{\text{traslazione}}.$$

Es: 1) Scrivere la rotazione di $90°$ in senso antiorario rispetto al punto $P_0=(-1,5)$

$$(x,y) \rightsquigarrow (x+1,\ y-5) \underset{\substack{\text{ruoto}\\ \text{nell'origine}\\ \text{di } 90° \\ \text{in senso antiorario}}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+5 \\ x+1 \end{pmatrix}.$$

$$\rightsquigarrow (-y+5-1,\ x+1+5)$$

$$(-y+4, x+6) \quad *$$
$$f(x, y)$$

B) Determinare l'immagine tramite f della retta affine di equazione $2x+3y=7$

1° modo: Prendo due punti P_1, P_2 distinti sulla retta.
Calcolo la loro immagine tramite f usando $*$.
Scrivo l'equazione della retta passante per $f(P_1)$, $f(P_2)$.

2° modo. Scrivo la retta $r: 2x+3y-7=0$ in forma parametrica.

$r = \{ \underbrace{(2,1)}_{\substack{v_0 \\ \text{punto} \\ \text{iniziale}}} + t \underbrace{(3,-2)}_{\substack{\text{vettore} \\ \text{direzione}}} \}$

$f(x,y) = (-y+4,\ x+6)$

La retta immagine $f(r)$ avrà

$f(v_0) = f((2,1))$ come punto iniziale $f((2,1)) = (3,8)$

- Come direzione il solo ruotato di $(3,-2)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{parte lineare di } f} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Forma parametrica di $f(r)$: $(3,8) + t\cdot(2,3)$.

c) Sempre con la stessa trasformazione f, determinare la retta che, una volta ruotata, diventa la retta $\{y = x\}$

$f(x,y) = (-y+4, x+6)$

1° modo: La retta richiesta è la rotazione oraria di $90°$ della retta $y = x$ intorno al punto $(-1,5) = P_0$ $\rightarrow$ Scrivo questa trasformazione e ~~faccio~~ i conti.

2° modo: Determino 2 punti P_1 e P_2 sulla retta $y = x$, ad esempio $P_1 = (1,1)$ $P_2 = (0,0)$. Cerco Q_1 e Q_2

tali che

$$\begin{cases} f(Q_1) = (1,1) \\ f(Q_2) = (0,0) \end{cases}$$

- Risolvo il sistema e scrivo la retta passante per Q_1 e Q_2

3° modo (più furbo) $f(x,y) = (-y+4, x+6)$ cerco i punti le cui immagini tramite f hanno la prima coordinata uguale alla seconda: $-y+4 = x+6$, cioè $\boxed{x+y+2=0}$

Oss. Se avessi voluto trovare la controimmagine di $3x+2y=7$ bastava imporre $3(-y+4)+2(x+6)=7 \rightsquigarrow 2x-3y+17=0$

Oss: Quando si tratta di trovare immagini/controimmagini di sottospazi affini tramite mappe affini:

→ le rappresentazioni parametriche sono comode per trovare le imm immagini

→ " " cartesiane " " " " controimmagini

Es: Cosa succede se faccio una rotazione in senso orario di angolo α rispetto a un punto, seguita da una rotazione in senso antiorario rispetto a un altro punto?

$$f_1(x) = A_1 x + b_1 \qquad A_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$f_2(x) = A_2 x + b_2 \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$f_2(f_1(x)) = A_2(A_1 x + b_1) + b_2 = \underbrace{A_2 \cdot A_1}_{= Id} x + A_2 b_1 + b_2$$

$$= x + A_2 b_1 + b_2$$

$=$ traslazione lungo il vettore $A_2 b_1 + b_2$.

Descrivere la trasformazione affine data, determinando se è un'omotetia, un'isometria (e in tal caso che tipo)

- $f(x,y) = (2x+y, y+3x+1) =$

$$f(x,y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- f non è un'omotetia poiché $A \neq \lambda \, Id$
- f non è un'isometria poiché A non è ortogonale.

∘ $f(x,y) = (2x+5, 2y-7) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

$A = 2 \cdot Id \Rightarrow f$ è un'omoletia di fattore 2.

Per trovare il centro dobbiamo trovare $P_0 = (x_0, y_0)$ t.c. $f(P_0) = P_0$

P_0 è l'unico punto fisso

$$\begin{cases} 2x_0 + 5 = x_0 \\ 2y_0 - 7 = y_0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_0 = -5 \\ y_0 = 7 \end{matrix}$$

$\Rightarrow f$ è un'omoletia di centro $(-5, 7)$ e fattore 2.

∘ $f(x,y) = (7+x, 3-y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

È un'isometria, poiché $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ è ortogonale.

$$A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+b=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow (A-I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-b$$

$$(A-I)=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-3\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}0 & 0 & -7\\0 & -2 & -3\end{array}\right)$$

Il sistema non ha soluzione x Rouché-Capelli

$\Rightarrow$ 2 casi possibili

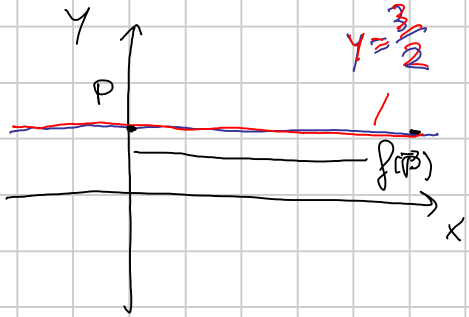
$A-I=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow f$ è una traslazione

$A-I\neq\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow f$ è la composizione di una riflessione lungo una retta r

è una traslazione lungo un
vettore parallelo a r.

In questo $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$



A rappresenta la riflessione rispetto alla retta $\{y = 0\}$

Quindi f preserva una retta della forma

$\{y = c\}$ Chiedo $f(\{y = c\}) = \{y = c\}$

Dall'espressione di f $f(x,y) = (7 + x, 3 - y)$

$c = 3 - c \Rightarrow 2c = 3 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ la retta di equazione $\{y = \frac{3}{2}\}$ È preservata da f

Per calcolare la traslazione, prendo un punto qualsiasi sulla retta $\{y = \frac{3}{2}\}$, ad esempio $P = (0, \frac{3}{2})$ e calcolo $\underset{(7, \frac{3}{2})}{\underset{\shortparallel}{f(P)}}$

$f(P) - P = (7, 0)$

f è la composizione della riflessione rispetto alla retta $r \doteq \{y = \frac{3}{2}\}$ con la traslazione lungo il vettore $v_0 = (7, 0)$.

- $f(x, y) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y + 5, x + \sqrt{3}y + 7)$

$f(x,y) = Ax + b \quad A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$

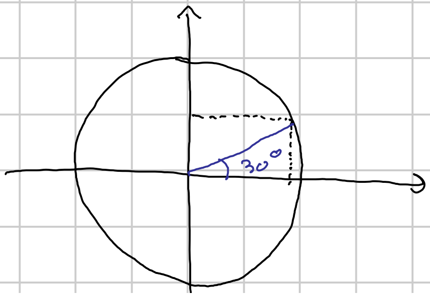
$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ A è ortogonale

($AA^t = Id$, vettori colonna sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$.)

$\Rightarrow f$ è un'isometria

Poiché $A \neq Id$ e $\det(A) = 1 \Rightarrow A$ è una rotazione di angolo α

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$



$\alpha = 30° = \frac{\pi}{6}$

A è una matrice di rotazione in senso antiorario di angolo $\frac{\pi}{6} = 30°$

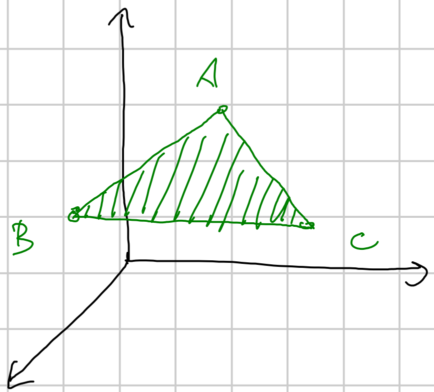
Centro di rotazione: risolvere $f(x) = x$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{y}{2} + \frac{5}{2} = x \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{7}{2} = y \end{cases}$$

Consideriamo i 3 punti seguenti in $\mathbb{R}^3$:

$A = (1,2,4)$, $B = (1,3,6)$, $C = (-1,3,4)$

Determinare le espressioni di tutte le isometrie che mandano il triangolo ABC in se stesso.



Sicuramente l'identità e la riflessione nel piano P contenente A, B, C, fissano il triangolo. (fissano i vertici).

Ci sono isometrie che fissano il triangolo permutando i vertici?

$A = (1,2,4)$, $B = (1,3,6)$, $C = (-1,3,4)$

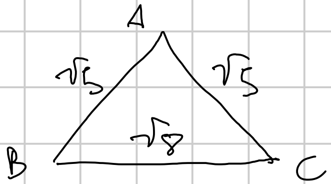
$B - A = (0,1,2)$ $\quad \|B-A\| = \sqrt{5}$

$C - A = (2,1,0)$ $\quad \|C-A\| = \sqrt{5}$,

$B - C = (2,0,2) =$

$\|B-C\| = \sqrt{8}$.

Il triangolo T è isoscele.



Devo aggiungere le mappe affini tali che

$f(A) = A$, $f(B) = C$, $f(C) = B$

punto fisso

.... traslo A nell'origine

$P \to P - A$.

A questo punto cerco tutte le applicazioni lineari ortogonali

tali che.

$f(B - A) = C - A$

$f(C - A) = B - A$

... Sono le parti lineari $\overset{F}{\vee}$ delle applicazioni affini cercate.

Le scrivo e poi traslo di vettore A $P \to P+A$

$P \to P-A \to F(P-A) \to F(P-A)+A$.