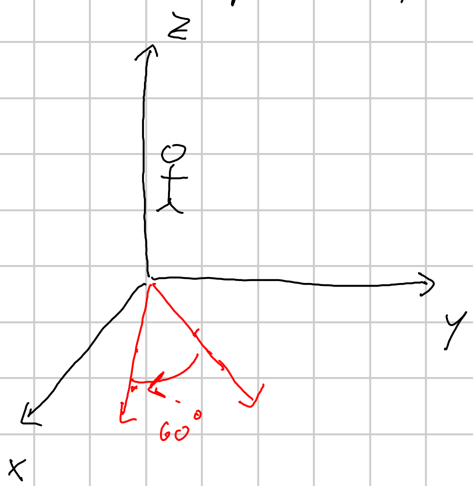
A.L. Lezione 13-12

Isometrie dello spazio.

1) Matrici ortogonali 3x3

Esempio: Scrivere la rotazione di 60° nel piano xy che lascia fisso l'asse z.



Importante: Dobbiamo precisare il verso della rotazione.

Voglio ruotare in senso orario per un omino messo in piedi lungo l'asse z positivo

$f(0,0,1)=(0,0,1)$ (autovettore di autovalore 1)

Nel piano (x,y) $\begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$ - rotazione in senso orario di angolo α

$$A=\begin{pmatrix} \cos(-60°) & -\sin(-60°) & 0 \\ \sin(-60°) & \cos(-60°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 2: Scrivere la simmetria rispetto al piano di equazione $x-y+2z=0 = P$

Cosa deve succedere?

- Una base del piano P deve essere mandata in se stessa.
- Un vettore v ortogonale al piano va in − se stesso.

Base del piano P = $v_2 = (-2, 0, 1)$ $v_3 = (0, 2, 1)$

Vettore $v_1 \perp$ al piano $v_1 = (1, -1, 2)$

Base di $\mathbb{R}^3$: $B = \{v_1, v_2, v_3\}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{cambio di base da B alla canonica}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = A$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$-\frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3})$

A verifica

$A(v_1) = -v_1$

$A(v_2) = v_2$

$A(v_3) = v_3$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rappresenta $(x, y, z) \longrightarrow (z, y, -x)$

Osservo che le colonne di A sono una base ortonormale $\Rightarrow$ A è ortogonale $\Rightarrow$ A rappresenta un'isometria.

Calcoliamo gli autovalori:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1-\lambda)(\lambda^2+1) \qquad \left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = i \\ \lambda_3 = -i \end{array}\right\} \text{autovalori}$$

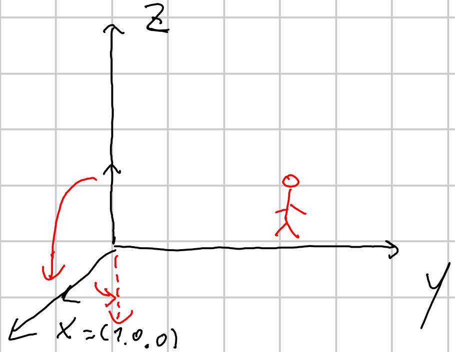
La matrice rappresenta una rotazione di $90°$ rispetto a un asse.

Quale asse? Quello generato dall'autovettore di autovalore 1

$\mathrm{Span}(0,1,0)$

Rotazione di $90°$ in che verso?

$f(1,0,0) = (0,0,-1)$



$f(0,0,1) = (1,0,0)$ Rotazione in verso antiorario di $90°$ per un omino in piedi sull'asse delle y positive.

Stessa trasformazione $f(x,y,z) = (z, y, -x)$

Calcolare l'immagine della retta $(7,2,1) + t\cdot(4,0,3)$

$(7+4t, 2, 1+3t) = (1+3t, 2, -7-4t) = (1,2,-7) + t\cdot(3,0,-4)$

Controimmagine del piano $x+y-3z=0$

Sostituiamo $\underbrace{z}_{\text{nuova } x} + \underbrace{y}_{\text{nuova } y} - 3\underbrace{(-x)}_{\text{nuova } z} = 0 \rightsquigarrow z+y+3x=0$

Esempio: Capire che cosa rappresenta $(x, y, z) \to (z, x, y)$

La matrice associata è $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Si vede che è ortogonale

Autovalori $p(\lambda) = -\lambda^3 + 1 = 0$

$$(\lambda - 1) \cdot (\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$$

$\lambda = 1$ è autovalore.

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\cos\theta} + i \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\sin\theta} \qquad \theta = 120^\circ$$

Quindi A è una rotazione di $120°$ rispetto all'asse generato dall'autovettore di autovalore $\lambda = 1$.

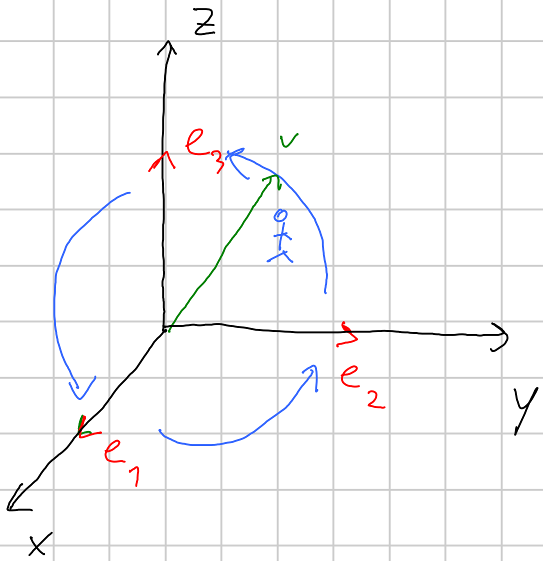
Risolvendo $(x, y, z) = (z, x, y)$ troviamo $x = y = z$, da cui

$v = (1, 1, 1)$ è autovettore di autovalore 1.

$f(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$

$f(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$

$f(0, 0, 1) = (1, 0, 0)$



La rotazione è antioraria di $120°$ per un omino in piedi lungo $(1, 1, 1)$

Classificazione delle isometrie di $\mathbb{R}^3$.

Domanda: come sono fatte geometricamente tutte le isometrie di $\mathbb{R}^3$? Cioè tutte le $f(x) = Ax+b$ con A ortogonale?

Studiamo l'insieme dei punti fissi di f, cioè le soluzioni di $f(x)=x$, cioè $Ax+b=x$, cioè

$(A-Id)x=-b$ Sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite.

$\boxed{1}$ L'insieme dei punti fissi ha dimensione 3, quindi è tutto $\mathbb{R}^3$.

In tal caso $f(x)=x$ $\forall x \in \mathbb{R}^3$, cioè f è l'identità.

$f(x) = x \quad A = Id, \quad b = 0$

$\boxed{2}$ L'insieme dei punti fissi ha dimensione 2, cioè un piano.

Allora f è la simmetria rispetto a tale piano

(A ha autovalori $(1, 1, -1)$) e $b \in Im(A - I)$

$\boxed{3}$ L'insieme dei punti fissi ha dim. 1, quindi è una

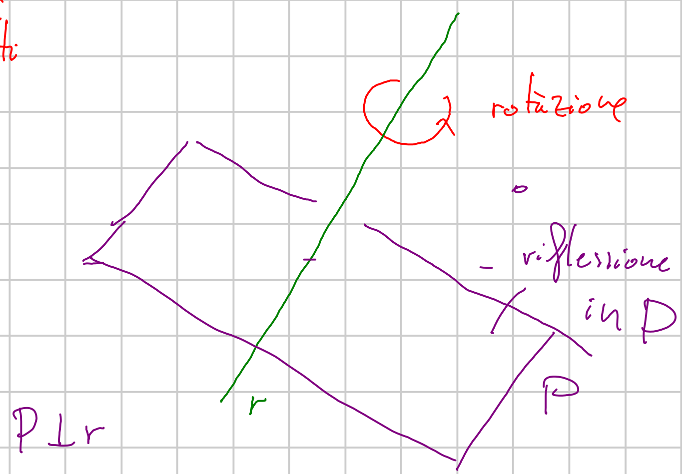
retta. Allora $f(x)$ è una rotazione rispetto a tale retta

(A ha autovalori $(1, z, \bar{z})$ e $b \in Im(A - I)$.

complessi
coniugati

$\boxed{4}$ Esiste un unico punto fisso. Allora f è una rotazione intorno a una retta, seguita da una simmetria rispetto a un piano ortogonale alla retta.

(A ha autovalori $-1, \underbrace{z, \bar{z}}_{\text{complessi coniugati}}$) e $-b \in \operatorname{Im}(A-I)$

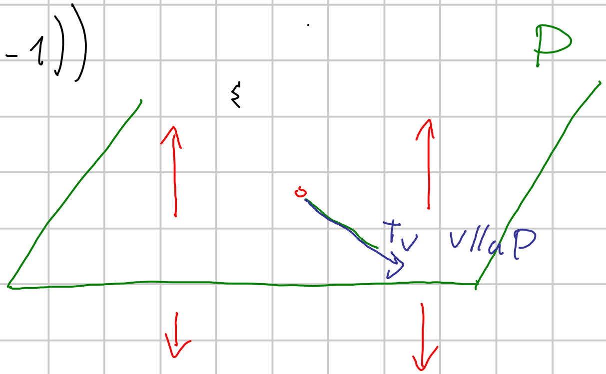


$\boxed{5}$ Non ci sono punti fissi $b \notin Im(A - I)$.

Si aprono 3 sotto-casi

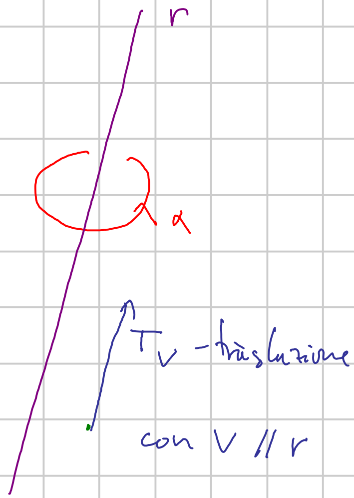
$\boxed{5.1.}$ $f(x)$ è una traslazione $(A = Id)$

$\boxed{5.2}$ $f(x)$ è una simmetria rispetto a un piano, seguita da una traslazione di un vettore b parallelo al piano (A ha autovalori $(1, 1, -1)$)



$\boxed{5.3.}$ $f(x)$ è una rotazione rispetto a un asse, seguita da una traslazione lungo una direzione parallela a tale asse.

(A ha autovalori $(1, \underbrace{z, \bar{z}}_{\text{complessi coniugati}})$)



Domanda 1: Data una descrizione geometrica, scrivere l'espressione analitica.

Domanda 2: Data una trasformazione espressa mediante equazioni, capire di cosa si tratta geometricamente.

Risposta a 1: Si cerca di portare il problema nell'origine (tramite traslazioni) e poi lo si studia.

Risposta a 2: Avuta la trasformazione nella forma

$f(x) = A \cdot x + b$

- Calcolo l'insieme dei punti fissi

$\Rightarrow$ Vedo in quale caso mi trovo.

Se non ci sono punti fissi, guardo la matrice A.

Questa ha per forza l'autovalore 1. (per Rouché-Capelli)
(non ci sono soluzioni)

Guardiamo la molteplicità geometrica.

- $mg(1) = 3$ ($A = Id$) Caso 5.1. (traslazione)
- $mg(1) = 2$ caso 5.2.
- $mg(1) = 1$ caso 5.3.

Oss: Le matrici ortogonali hanno det 1 oppure -1.

Nella classificazione precedente i casi

$\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5.1}$, [5.3] hanno det. 1

I casi $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5.2}$ hanno det. -1.

Es: Scrivere l'espressione della simmetria rispetto al piano $2x+3y-z=5 = P$

- Prendo $P_0 \in P$, $P_0 = (1, 1, 0)$

traslo P_0 nell'origine

$(x,y,z) \longrightarrow (x-1, y-1, z)$.

Faccio la simmetria rispetto al piano $2x+3y-z=0$

$$\underbrace{v_1=(1,0,2),\quad v_2=(0,1,3)}_{\text{base del piano}} \qquad \underbrace{v_3=(2,3,-1)}_{\text{perp. al piano.}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = A$$

Alla fine $A\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{parte lineare}} + \underbrace{A\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{traslazione.}}$