Sottosoluzioni relativi all'energia di Dirichlet.
Stime di densità e applicazioni

Bozhidar Velichkov
(Scuola Normale Superiore di Pisa)
in collaborazione con Dorin Bucur (Université de Savoie)

L'energia di Dirichlet di un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ è definita come

$$E(\Omega) = \min_{w \in H_0^1(\Omega)} \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega u\, dx. \tag{0.1}$$

Diciamo che un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ è una sottosoluzione per l'energia di Dirichlet, se per ogni $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ si ha

$$E(\Omega) + |\Omega| \leq E(\tilde{\Omega}) + |\tilde{\Omega}|, \tag{0.2}$$

dove con $|\cdot|$ indichiamo la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^d$.

In questo seminario dimostreremo che se Ω è una sottosoluzione per l'energia di Dirichlet, allora per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ vale una delle seguenti affermazioni:

- $|B(x,r) \cap \Omega| = 0$ per qualche $r > 0$,
- $\limsup_{r \to 0} \frac{|B(x,r) \cap \Omega|}{|B(x,r)|} \geq c$,

dove c è una costante che dipende soltanto dalla dimensione e $B(x,r)$ indica la palla centrata in x di raggio r. Come conseguenza otteremo che il seguente problema di ottimizzazione di forma, ha soluzione nella classe degli insiemi aperti:

$$\min\left\{\lambda_2(\Omega) + |\Omega| : \ \Omega \subset D\right\}, \tag{0.3}$$

dove λ_2 è il secondo autovalore del Laplaciano di Dirichlet su Ω, e $D \subset \mathbb{R}^d$ è un insieme aperto e limitato.

Bozhidar Velichkov:
Scuola Normale Superiore di Pisa
Piazza dei Cavalieri 7, 56126 Pisa - ITALY
`b.velichkov@sns.it`