SISTEMI GRADIENTE STOCASTICI

Giuseppe Da Prato (S.N.S. Pisa)

Abstract

Si considera un'equazione di evoluzione in uno spazio di Hilbert H del tipo

$$\begin{cases} dX(t) = [AX(t) - DU(X(t))]dt + dW(t), \\ \\ X(0) = x, \end{cases} \tag{1}$$

dove $A\colon D(A) \subset H \to H$ è un operatore lineare auto-aggiunto di tipo negativo, $U\colon H \to [0, +\infty]$ un'applicazione nonlineare, DU il suo gradiente (o sub-gradiente) e $W(t)$ è un processo di Wiener cilindrico.

Si definisce il semigruppo di transizione

$$P_t\varphi(x) = \mathbb{E}[\varphi(X(t,x))], \quad t \geq 0,\ \varphi \in C_b(H)$$

e si prova che esso possiede, sotto opportune ipotesi, una misura di probabilità invariante esplicita data da:

$$\nu(dx) = Z^{-1}e^{-2U(x)}\mu(dx),$$

dove Z è una costante di normalizzazione e μ la misura gaussiana in H di media 0 e operatore di covarianza $Q = -\frac{1}{2}\ A^{-1}$.

Viene poi studiata la realizzazione in $L^2(H,\mu)$ dell'operatore di Kolmogorov corrisponente a (1),

$$K\varphi = \frac{1}{2}\ \mathrm{Tr}\ [D^2\varphi] + \langle Ax - DU(x), D\varphi\rangle$$

e ne vengono studiate diverse proprietà.