Metodo di Galerkin e metodo elementi finiti

Abbiamo il seguente problema variazionale

Cerco $u \in H_0^1(\Omega)$: $\underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f v}_{F(v)}$, $\forall\, v \in H_0^1$ (PV)

lo spazio H_0^1 è uno spazio vettoriale ∞-dimensionale, pertanto il calcolo di u soluzione del problema (PV) non è fattibile al computer

Idea del metodo di Galerkin: sostituire H_0^1 con uno spazio finito-dimensionale V_h (dove h è un parametro che misura la "precisione" dell'approssimazione)

Dunque:

Cerco $u_h \in V_h$: $a(u_h, v_h) = F(v_h)$, $\forall v_h \in V_h$ (MG)

Stima d'errore "a-priori" per il metodo di Galerkin

<u>Lemma di Cauchy-Schwarz:</u> date $f, g \in L^2(\Omega)$

vale la disuguaglianza:

$$\int_\Omega f \cdot g \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2} \qquad (CS)$$

<u>dimostrazione</u>: sia $\alpha \in \mathbb{R}$, vale

$$0 \leq \int_\Omega \left(f(x) + \alpha g(x) \right)^2 dx$$

$$= \int_\Omega f^2 + \alpha^2 \int_\Omega g^2 + 2\alpha \int_\Omega f g$$

Ora cerco α che minimizza l'ultima riga

α che minimizza $\quad \alpha^2 A + 2\alpha B + C$

tale α vale $\quad \dfrac{-2B}{2A} = -\dfrac{B}{A} = -\dfrac{\int fg}{\int g^2}$.

Sostituendo:

$$0 \leq \int f^2 + \left(\int fg\right)^2 \Big/ \int g^2 - 2\left(\int fg\right)^2 \Big/ \int g^2 = \int f^2 - \frac{\left(\int fg\right)^2}{\int g^2}$$

in conclusione: $\quad 0 \leq \left(\int g^2\right)\left(\int f^2\right) - \left(\int fg\right)^2$

che è (CS)

Proprietà della forma bilineare $a(\cdot,\cdot)$

① CONTINUITÀ : $a(w,v) \leq |w|_{H^1} \, |v|_{H^1}$

② COERCIVITÀ : $a(w,w) \geq |w|^2_{H^1}$

dove ricordo le notazioni:

$$a(w,v) = \int \nabla w \circ \nabla v$$

$$|w|^2_{H^1} = \|\nabla w\|^2_{L^2} = \int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

③ ORTOGONALITÀ DI GALERKIN: $a(u-u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$

dimostrazione: $a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in H^1_0$

$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$

dato che $V_h \subseteq H^1_0$ $\quad a(u, v_h) = F(v_h)$, sottraggo ...

Stima dell'errore a-priori

$$|u-u_h|^2_{H^1} \overset{\text{coercività}}{\leq} a(u-u_h, u-u_h)$$

$$= a(u-u_h, u-u_I+u_I-u_h)$$

$$= a(u-u_h, u-u_I) + \underbrace{a(u-u_h, u_I-u_h)}_{=0 \text{ Galerkin ortogonality}}$$

$$\overset{\text{continuità}}{\leq} |u-u_h|_{H^1}|u-u_I|_{H^1}$$

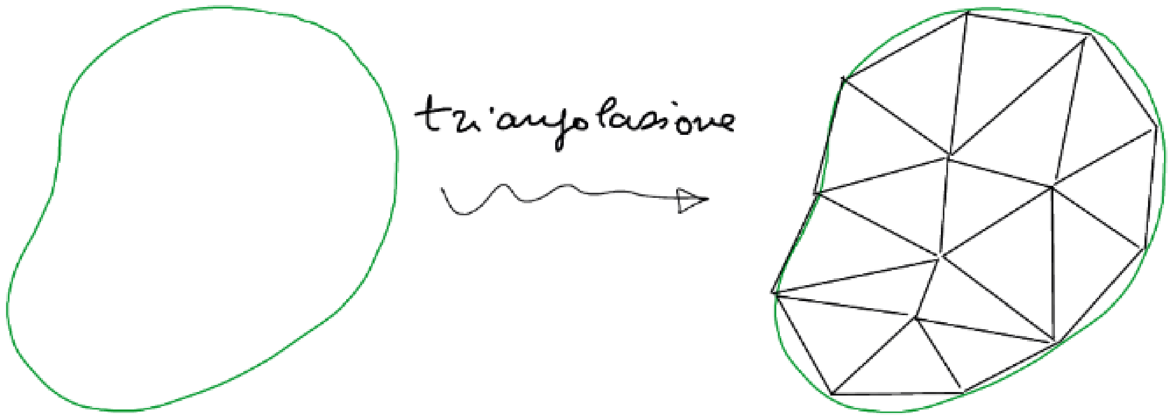
dividendo

$$\boxed{|u-u_h|_{H^1} \leq |u-v_I|_{H^1}} \leftarrow \text{ottimalità}$$

$$\|u-u_h\| \leq C\|u-u_I\| \longleftarrow \text{quasi-optimality}$$

l'errore del metodo di Galerkin è minore o uguale dell'errore di miglior approssimazione

<u>Il metodo degli elementi finiti</u> è un metodo di Galerkin con una scelta particolare dello spazio V_h



Il dominio Ω viene "triangolato" e si definisce V_h come lo spazio delle funzioni

1. lineari in ogni triangolo (oppure polinomiali...)
2. globalmente continue
3. nulle al bordo (nel caso $V_h \subseteq H^1_0$)

tali funzioni sono determinate dal loro valore nei vertici della triangolazione (gradi di libertà)

cioè $V_h \simeq \mathbb{R}^{nV}$, e l'isomorfismo definisce una base naturale per lo spazio V_h (... funzioni di forma)