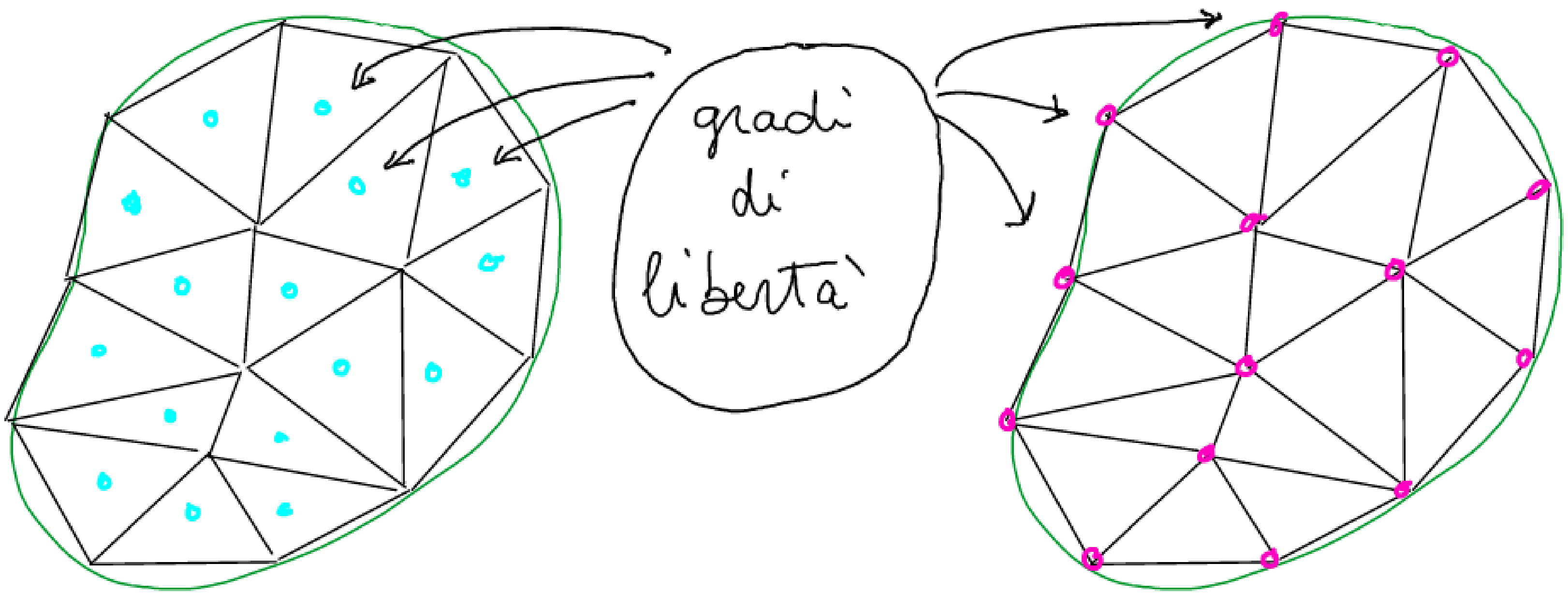
Interpolazione nodale e quadratura numerica.

data una triangolazione T_h chiamo

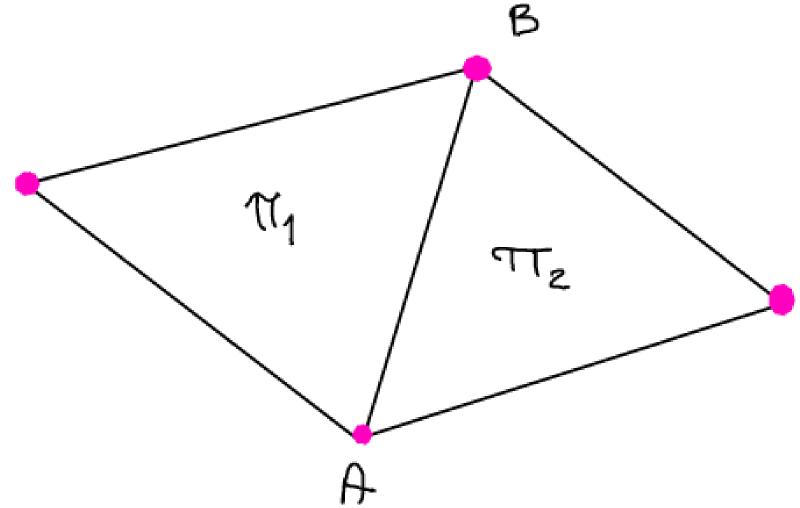
"P0" lo spazio delle funzioni costanti a tratti e
"P1" lo spazio delle funzioni lineari a tratti e continue



una funzione P0 è individuata dai valori che assume nei baricentri (corrispondenza biunivoca)

una funzione "P1" è individuata dai valori che assume nei vertici di T_h (corr. biunivoca)

Oss: un polinomio $\underbrace{\text{è}}_{}$ (lineare) univocamente individuato dal valore che assume nei vertici di un triangolo. Quindi in ogni triangolo di $\mathcal{T}_h$ possiamo associare un polinomio lineare alle tre valutazioni nei vertici e viceversa. Se associamo un valore ad ogni vertice di $\mathcal{T}_h$, costruiamo il corrispondente polinomio in ogni triangolo, la <u>continuità è automatica</u>



se $\pi_1(A) = \pi_2(A)$

$\pi_1(B) = \pi_2(B)$

allora $\pi_1 \equiv \pi_2$ su $[A,B]$

Interpolazione

data $u : \Omega \to \mathbb{R}$ definisco $\Pi_0 u \in P0$ e $\Pi_1 u \in P1$ come

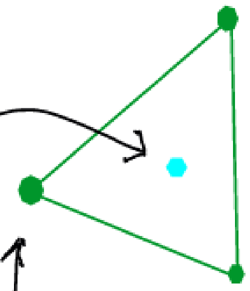
$(\Pi_0 u)(x) = u(x)$ $\quad x \in$ insieme dei baricentri

$(\Pi_1 u)(x) = u(x)$ $\quad x \in$ insieme dei vertici

Formule di quadratura

$$\int_\Omega u(x)\,dx \simeq \int_\Omega (\Pi_0 u)(x)\,dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\Pi_0 u)(x)\,dx$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |T| \, u(b_T)$$



$$\int_\Omega u(x)\,dx \simeq \int_\Omega (\Pi_1 u)(x)\,dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\Pi_1 u)(x)\,dx$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |T| \, \frac{u(V_T^1) + u(V_T^2) + u(V_T^3)}{3}$$

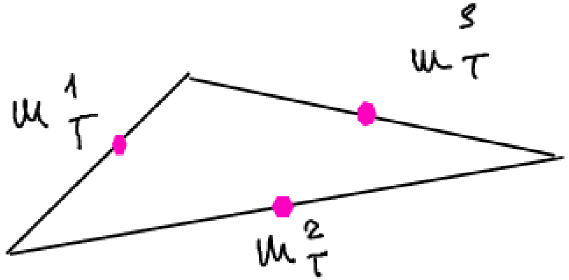
Le precedenti formule di quadratura sono entrambe esatte se u è lineare a tratti. Ovvio per la seconda, per quanto riguarda la prima: se π è lineare allora

$$\pi(b_T) = \pi\left(\frac{V_T^1 + V_T^2 + V_T^3}{3}\right) = \frac{\pi(V_T^1) + \pi(V_T^2) + \pi(V_T^3)}{3}$$

Una formula di quadratura più accurata (esatta sulle funzioni quadratiche è la seguente:

$$\int_\Omega u(x)\,dx \simeq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |T| \cdot \left(\frac{u(m_T^1) + u(m_T^2) + u(m_T^3)}{3}\right) = Q_2(u)$$

dove m_T^i sono i punti medi dei lati di ogni triangolo



Esercizio: misurare numericamente l'ordine di convergenza delle precedenti formule di quadratura, cioè:

- scegliere una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ definita su un dominio Ω in modo che $\int_\Omega u(x)\,dx$ sia calcolabile analiticamente.
- calcolare l'errore di quadratura

$$\left| \int_\Omega u(x)\,dx - Q(u) \right| = \text{errore}$$

per diverse $\mathcal{T}_h$ (con diverso meshsize h)

- fare un diagramma in scala logaritmica della relazione errore vs h
- provare con u lineare, quadratica, u di altro tipo...