Analisi Matematica 2 - 30/01/17 - Tempo a disposizione: 3h

Matricola Cognome e Nome

A1. **[6 punti]** Calcolare su $(0,1)$: a) l'insieme di convergenza puntuale E della serie $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, b) la successione $a_n = \sup_{x\in(0,1)} |f_n(x)|$, c) l'insieme di convergenza totale F della serie S, dove

$$f_n(x) = \frac{\log(x+n)}{n^2}$$

$E = (0,1)$, $a_n = \log(n+1)/n^2$, $F = (0,1)$

A2. **[8 punti]** Calcolare il flusso del campo $f(x,y,z) = (x,y,z)$ uscente da $\partial\Omega$ dove

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x,\, y,\, z > 0,\, x+y+z < 1\}$$

esplicitando i passaggi salienti.

$\int_{\partial\Omega} f \cdot n \, dS = \int_\Omega \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = 3\int_\Omega dx\,dy\,dz =$ $\boxed{E = \{(x,y) : 0<x<1, 0<y<1-x\}}$

$= 3\int_E \left(\int_0^{1-x-y} dz\right) dx\,dy = 3\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy\,dx = \frac{1}{2}$

A3. **[6 punti]** Determinare $\nabla f(x,y)$, gli eventuali punti stazionari, la matrice Hessiana e gli eventuali punti di massimo e minimo **assoluti** su $\mathbb{R}^2$ della funzione $f(x,y) = x^8 + 2(x-y)^2$.

$\nabla f(x,y) = (8x^7 + 4(x-y), -4(x-y))$, p.to staz: $(0,0)$,

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, p.to min ass. : $(0,0)$, non ho max ass.

A4. **[8 punti]** Calcolare l'integrale

$$I = \int_E xy \, dxdy$$ nel semipiano dove $y>0$

dove E è il semicerchio chiuso di raggio $1/2$ e centrato in $(1/2, 0)$ esplicitando i seguenti passaggi: 1) impostare l'integrale doppio scrivendo in maniera esplicita gli estremi d'integrazione; 2) calcolare l'integrale I (utilizzando le formule di riduzione).

$E = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{-x^2+x}\}$

$I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{-x^2+x}} xy \, dy = \int_0^1 x \cdot \left(\frac{x-x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{24}$

A5. **[6 punti]** Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che la derivata nella direzione $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ di f sia $D_v f(a,b) = 2\sqrt{2}$ e nella direzione $w = (3/5, -4/5)$ sia $D_w f(a,b) = 3$, calcolare $\nabla f(a,b) =$

$\nabla f(a,b) = \left(\frac{31}{7}, -\frac{3}{7}\right)$

B1. **[12 punti]** Dato l'insieme $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{\log(x+y+3)}{x^2+y^2} \in \mathbb{R}\right\}$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere o false barrando la casella corrispondente:

1. E è chiuso e non limitato

   $\boxed{A}$ VERO $\quad$ $\cancel{\boxed{B}}$ FALSO

2. La frontiera di E è data dall'insieme $\partial E = \{x+y+3=0\} \cup \{(0,0)\}$

   $\cancel{\boxed{A}}$ VERO $\quad$ $\boxed{B}$ FALSO

3. La chiusura di E è data dall'insieme [redacted] $\{x+y+3 \geq 0\}$

   $\cancel{\boxed{A}}$ VERO $\quad$ $\boxed{B}$ FALSO

B2. **[8 punti]** Sia $F(x,y) = \left(xy, \dfrac{x^2}{2}\right)$. Allora quale delle seguenti risposte è corretta (barrare una sola risposta): $\boxed{A}$ F è conservativo su $\mathbb{R}^2$ e un potenziale è $U(x,y) = \dfrac{x^2}{4}y$ $\boxed{B}$ F è conservativo su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ma non su $\mathbb{R}^2$ $\cancel{\boxed{C}}$ F è conservativo su $\mathbb{R}^2$ e un potenziale è $U(x,y) = \dfrac{x^2}{2}y$ $\boxed{D}$ F non è conservativo.

B3. **[6 punti]** Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere o false barrando la casella corrispondente:

1. Se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ allora f è somma di una serie di potenze di centro x_0 e raggio R per un qualche $x_0 \in \mathbb{R}$ e $R > 0$.

   $\boxed{A}$ VERO $\quad$ $\cancel{\boxed{B}}$ FALSO

2. Se f è somma di una serie di potenze di centro x_0 e raggio R per un qualche $x_0 \in \mathbb{R}$ e $R > 0$ allora $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

   $\cancel{\boxed{A}}$ VERO $\quad$ $\boxed{B}$ FALSO

3. Sia R il raggio di convergenza di una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, allora la serie converge per $|x - x_0| \leq R$

   $\boxed{A}$ VERO $\quad$ $\cancel{\boxed{B}}$ FALSO

B4. **[8 punti]** Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quale delle seguenti risposte è corretta (barrare una sola risposta):

$\boxed{A}$ f è differenziabile in $(0,0)$ $\cancel{\boxed{B}}$ f è continua ma non differenziabile in $(0,0)$ $\boxed{C}$ f è continua in $(0,0)$ e $\nabla f(0,0) = (0,0)$ $\boxed{D}$ f è continua in $(0,0)$ ma non esiste nessuna derivata direzionale in $(0,0)$.