

Equazioni di reazione diffusione (Equazioni paraboliche semilineari)

(1)

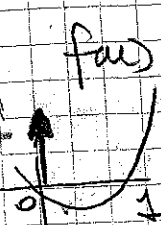
Numerosi fenomeni chimici e biologici (transizioni di fase solido/liquido dinamica delle popolazioni) sono governati da equazioni delle forme:

$$u_t - \Delta u + f(u) = 0$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 diffusione reazione

(i) Allen-Cahn: descrive l'evoluzione del cosiddetto parametro d'ordine

$\begin{cases} +1 & \text{fase solida} \\ -1 & \text{fase liquida} \end{cases}$
 $f(u) = u^3 - u$

$$f(u) = u^3 - u \quad \boxed{u_t - \Delta u + u^3 - u = 0}$$


(ii) Dinamica delle popolazioni
(Fisher's equation // Fisher-Kolmogoroff equation)

ha sporto di un gene dominante in una popolazione
crescita di una popolazione che si muove (diffusione)

$$f(u) = u^2 - u \quad \boxed{u_t - \Delta u + u^2 - u = 0}$$


(iii) Genetica // teoria dei circuiti elettronici
 $f(u) = u(u-1)(u-d)$ $0 < d < 1$

2) Vogliamo quindi vedere cosa possiamo dire su ^{generalissimo}

$$\boxed{u_t - \Delta u + f(u) = g} \quad \text{in } \Omega \times (0, T), T > 0$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dominio limitato.

Altamente dovremo fare delle ipotesi su f , ovvero non potremo ammettere una non linearità qualsiasi. Tenuto conto degli esempi visti prima sceglieremo una f sufficientemente regolare (ad esempio $f \in C^1(\mathbb{R})$) con limitazioni di crescita del bene e dell'alto di tipo polinomiale.

Ci si aspetta che • maggiore sia il grado del polinomio $\Rightarrow$ maggiori siano i problemi • maggiore sia n ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) $\Rightarrow$ maggiori siano i problemi.

Tenuto rispetto a quello che abbiamo visto nel caso lineare qui daremo peso al limite in $\underline{f(u_n)}$, quindi avremo bisogno di una convergenza forte per u_n (punto molto importante).

Audiamo adesso ad esaminare le condizioni al contorno. (3)

Per semplicità tratteremo solo il caso omogeneo per tutte le tipologie: Dirichlet / Neumann / Robin

$$\boxed{\Gamma > 0}$$

Formuliamo quindi i nostri problemi:

$$P_K \begin{cases} u_t - \Delta u + f(u) = g & \Omega_T = \Omega \times (0, T) \\ u(0) = u_0 & \Omega \\ (BC)_K & \Gamma_T = \Gamma \times (0, T) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (BC)_K \begin{cases} u = 0 & \text{su } \Gamma_T \quad K = D \text{ Dirichlet} \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0 & \text{su } \Gamma_T \quad K = R \text{ Robin} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \Gamma_T \quad K = N \text{ Neumann} \end{cases} \\ \boxed{\mathbb{R} \ni \alpha \geq 0} \end{array}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dominio limitato di classe C^1

$n \leq 3$ (consideriamo solo i casi concreti)

Prima di formulare le Hp su f, g, u_0 , ricordiamo cosa abbiamo visto nel caso lineare ($f=0$) - Spazio ambiente $H = L^2(\Omega)$

$$K=D \quad V = H_0^1(\Omega) \Rightarrow V = H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) = H = H' \subset V' = H^{-1}(\Omega)$$

$$K=N, R \quad V = H^1(\Omega) \Rightarrow V = H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) = H = H' = V' = (H^1(\Omega))'$$

osserviamo che in tutti i casi $V \subset H \subset V'$ forma hilbertiana

4) Ipotesi su f

(H1) $f \in C^1(\mathbb{R})$

(se $d_1 = d_2 = \infty$
se non si semplifica)

(H2) $\exists k \geq 0, \alpha_1, \alpha_2 > 0$ tali che

$m=3: -k + \alpha_2 |y|^6 \leq f(y)y \leq k + \alpha_1 |y|^6$

$m=1,2: -k + \alpha_2 |y|^p \leq f(y)y \leq k + \alpha_1 |y|^p$ con $p \geq 2$

Osservare che se $[m]$ è piccolo la non linearità può avere crescita di grado qualsiasi

(altrimenti caso banale reali $\otimes$)

Perché la scelta di questi esponenti?

(per $m=3$ $p=6$ per $m=1,2$ p qualsiasi)

La risposta viene dai teoremi di immersione di Sobolev. Infatti:

Se $m=3 \Rightarrow H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$

Se $m=2 \Rightarrow H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega), \forall p \in [1, +\infty)$

Se $m=1 \Rightarrow H^1(\Omega) \subset C^{0,1/2}(\Omega)$

Quindi se dovessimo risolvere il problema in $\mathbb{R}^n$ con $n > 3$ dovremmo scegliere un esponente p più piccolo di 6.

(H3) $f'(y) \geq -\gamma \quad \gamma \in \mathbb{R}$

⊛ Osservazione ①

(5)

Se vale $(H_2) \Rightarrow \exists \beta > 0 :$

$$|f(y)| \leq \beta(1 + |y|^{p-1}), \text{ con } p=6 \text{ se } n=3$$

Supponi se

$$|y| \geq 1 \Rightarrow |f(y)| = \left| \frac{f(y)y}{y} \right| \leq \frac{k}{|y|} + \alpha_1 |y|^{p-1} \leq k + \alpha_1 |y|^{p-1}$$

$$|y| \leq 1 \Rightarrow |f(y)| = |f'(z)(y-1) + f(1)| \leq$$

$$\leq \sup_{z \in [-1,1]} |f'(z)| |y-1| + k + \alpha_1 \leq$$

$$\leq 2 \sup_{z \in [-1,1]} |f'(z)| + k + \alpha_1 := \beta$$

~~Osservazione ②~~

~~Se in (H_2) $k=0 \Rightarrow$~~

~~$$\alpha_2 y^p \leq f(y)y \leq \alpha_1 y^p$$~~



~~$(y \geq 0)$~~

~~$$\alpha_2 y^{p-1} \leq f(y) \leq \alpha_1 y^{p-1} \quad f(y) \text{ è monotona}$$~~

~~Nel caso generale di (H_2) non~~

~~esistono i casi (come negli esempi)~~

~~in cui $f(y)$ ha una parte monotona~~

~~e una anti monotona.~~

6) Vogliamo ora riformulare il problema P_K in forma variazionale.

Nel caso delle equazioni non lineari andremo ancora sempre a mente il caso concreto

$$\left(\begin{array}{l} H_0^1 \subset L^2 \subset H^{-1} \\ H^1 \subset L^2 \subset (H^1)' \end{array} \right) \quad \int_{\Omega} \Delta u v = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v$$

$$\Rightarrow \langle z, w \rangle_{V'} = \int_{\Omega} z w \quad \left[\begin{array}{l} \text{quando} \\ \text{ha senso!} \end{array} \right]$$

Riscriviamo le equazioni

$$\begin{cases} \Delta u - \Delta u + f(u) = g \\ u(0) = u_0 \\ (BC)_K \end{cases}$$

Caso $K=D$

$$V = H_0^1(\Omega)$$

$\Rightarrow \forall v \in V$ si ha:

$$\int_{\Omega} \Delta u v + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} f(u) v = \int_{\Omega} g v$$

$$\langle u'(u), v \rangle_{V'} + \langle A_D u(u), v \rangle_{V'} + \langle f(u), v \rangle_{V'} = \langle g, v \rangle_{V'}$$

$$\langle A_D u, v \rangle_{V'} = a_D(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v$$

$$a_D: H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \quad a_D: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A_D: V \rightarrow V' \quad |\langle A_D u, v \rangle| = \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \right| \leq \|\nabla u\| \|\nabla v\| \leq \|u\|_V \|v\|_V$$

$$\bullet \|A_D u\|_{V'} \leq \|u\|_V \Rightarrow A_D \text{ lineare e continuo}$$

$$\bullet \langle A_D u, u \rangle_{V'} = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geq c \|u\|_V^2 \quad (\text{per la Poincaré})$$

$\Rightarrow A_D$ fortemente coercivo

Caso $K=N/R$

$$V = H^1(\Omega) \Rightarrow \forall v \in V \text{ si ha:}$$

$$\int_{\Omega} \Delta u v + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Gamma} \alpha u v + \int_{\Omega} f(u) v = \int_{\Omega} g v$$

$$\langle u'(u), v \rangle_{V'} + \langle A_K u(u), v \rangle_{V'} + \langle f(u), v \rangle_{V'} = \langle g, v \rangle_{V'}$$

$$\langle A_K u, v \rangle_V = a_K(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \alpha \int_{\Gamma} uv$$

$$a_K: H^1 \times H^1 \rightarrow \mathbb{R} \quad a_K: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

(N.B. se $u, v \in H^1(\Omega) \Rightarrow u, v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$)

$A_K: V \rightarrow V'$ ← same operation di traccia

$$\|A_K u\|_{V'} \leq C \|u\|_V \Rightarrow A_K \text{ lineare e continuo}$$

$$\langle A_K u, u \rangle_V = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \alpha \int_{\Gamma} u^2 \quad \left[\|u\|_V^2 \leq \frac{1}{C} (\|\nabla u\|_H^2 + \|u\|_H^2) \right]$$

$K = \mathbb{R} \quad \alpha > 0 \Rightarrow \langle A_K u, u \rangle_V \geq C \|u\|_V^2$ (Per dis Poincaré
feiner.)
 $\Rightarrow A_K$ fortemente coercivo $C_0 > 0$

$K = \mathbb{N} \quad \alpha = 0 \quad \langle A_N u, u \rangle_V = \|\nabla u\|_H^2$
 $\exists \lambda = 1 > 0: \langle A_N u, u \rangle_V + \|u\|_H^2 = \|u\|_V^2$
 $\Rightarrow A_N$ debolmente coercivo

Quindi in tutti i casi ($K = \mathbb{D}, \mathbb{N}, \mathbb{R}$) possiamo cominciare a scrivere l'equazione in forma variazionale come abbiamo fatto per il caso lineare:

$$\begin{cases} u'(t) + A_K u(t) + f(u(t)) = g(t) & \text{in } V' \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{in } V' \\ \text{per } q, 0 \leq t \leq T \end{array} \right\}$$

Dobbiamo ancora scrivere le f.p.s. su u_0 e g e dare senso a $f(u(t))$ in V' .

in che senso?

8) Ricordiamo cosa succede nel caso lineare:

Troviamo la soluzione u :

$$u \in W = \{ u \in L^2(0,T;V) : u' \in L^2(0,T;V') \}$$

e poi grazie ad un teorema $\Rightarrow$

$$u \in C^0([0,T];H)$$

quindi ricordando il caso lineare:

(H4) $u_0 \in H$

(H5) $g \in L^2(0,T;V')$

L'ultima cosa è dare senso a $f(u)$ in modo da includere in spazi funzionali analoghi a quelli del caso lineare

Dobbiamo per forza partire da un ambiente funzionale in cui essere u :

~~Problema P~~ ~~Valgono le ipotesi (H4) + (H5)~~

~~Trovare $u \in L^2(0,T) \cap L^6(\Omega \times (0,T))$~~

~~$f(u) = A(u)u + f(u) = g(u)$~~

~~$u(0) = u_0$~~

~~vediamo se tutto ha senso.~~

Osservazione ① Se $u \in L^6(\Omega \times (0,T)) \Rightarrow f(u) \in L^{\frac{6}{5}}(\Omega \times (0,T))$

Infatti da conseguenza di (H1) + (H2) $\Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1 !!!$

$$\int_0^T \int_{\Omega} |f(u)|^{\frac{6}{5}} \leq \int_0^T \int_{\Omega} \beta(1 + |u|^5)^{\frac{6}{5}} \leq$$

$$\leq C \int_0^T \int_{\Omega} 1 + C \int_0^T \int_{\Omega} |u|^6 \leq C(T|\Omega|) + C\|u\|_{L^6(\Omega \times (0,T))}^6$$

Quindi $f(u) \in L^{\frac{6}{5}}(\Omega \times (0, T))$.

(9)

Si ottiene inoltre che $f(u) \in L^{\frac{6}{5}}(0, T; V')$
 vale anche importante

Osservazione 2 Se $u \in L^2(0, T; V) \Rightarrow u' \in L^2(0, T; V') + L^{\frac{6}{5}}(\Omega \times (0, T))$

Ricordiamo che $A_K u \in L^2(0, T; V')$. Infatti

$$\|A_K u\|_{L^2(0, T; V')}^2 = \int_0^T \|A_K u(t)\|_{V'}^2 dt \leq \int_0^T C \|u(t)\|_V^2 dt \leq C \|u\|_{L^2(0, T; V)}^2$$

Quindi dall'equazione:

$$u'(t) = \underbrace{-A_K u(t) + g(t)}_{\in L^2(0, T; V')} - \underbrace{f(u(t))}_{\in L^{\frac{6}{5}}(\Omega \times (0, T)) \subset L^{\frac{6}{5}}(0, T; V')}$$

Osservazione 3 Vale il seguente teorema

Cauchy di $V \subset C^0([0, T]; H)$ del caso lineare

Teorema (Esercizio 8.2 del Robinson)

Sia $W_1 = \{u \in L^2(0, T; V) \cap L^p(\Omega \times (0, T)) : u' \in L^2(0, T; V') + L^q(\Omega \times (0, T))\}$

con p e q esponenti coniugati $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Allora $W_1 \subset C^0([0, T]; H)$.

Applichiamo il teorema al nostro caso.

- $u \in L^2(0, T; V) \cap L^{\frac{6}{5}}(\Omega \times (0, T))$
- $u' \in L^2(0, T; V') + L^{\frac{6}{5}}(\Omega \times (0, T))$

$$\frac{1}{\frac{6}{5}} + \frac{5}{6} = 1$$

$$\Rightarrow u \in C^0([0, T]; H)$$

Quindi l'equazione ha senso per $\forall t \in [0, T]$
 in V' e ha senso anche la condizione $u(0) = u_0$
 ($u \in C^0([0, T]; H)$)

10) Possiamo quindi enunciare il Teorema:
(F) soluzione debole

Teorema Valgono le ipotesi (H1) - (H5).
Allora (PW)
$$\begin{cases} u'(t) + A_K u(t) + f(u(t)) = g(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (K = D, N, R)$$

ammette 1. soluzione debole u tale che

- $u \in L^2(0, T; V) \cap L^6(\Omega \times (0, T))$
- $u \in C^0([0, T]; H)$
- $u'(t) + A_K u(t) + f(u(t)) = g(t)$ in V' , q. o. $t \in [0, T]$
- $u' \in L^2(0, T; V') + L^{\frac{6}{5}}(\Omega \times (0, T)) \subset L^{\frac{6}{5}}(0, T; V')$

Inoltre vale una stima di dipendenza continua.

~~Definizione. Formulazione del problema PW e del Teorema 1. sol. debole nel caso $n=1, n=2$ con α data p. generica.~~

Osservazione Faremo la dimostrazione solo nel caso $K = D$. Negli altri casi si adotta in modo semplice. Termini omogenei:

- $a_D(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \alpha \int_{\Gamma} u v$ è fortemente coerciva
inoltre $a_D(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \alpha \int_{\Gamma} u^2$ norma equiv.
 $\Rightarrow$ dimostrazione analoga a $\|u\|_V$
al caso $K = D$.

- caso $K = N$ caso "anomalo"

Qui si introducono:

(11)

$$\tilde{a}_N(u, v) = a_N(u, v) + \int_{\Omega} uv$$

$$\tilde{f}(u) = f(u) - u$$

In questo modo $\tilde{a}_N(u, v)$ è coerciva
e $\tilde{a}_N(u, u) = \int_{\Omega} |Du|^2 + \int_{\Omega} u^2 = \|u\|_V^2$

Esiste quando terremo f in H contro
 u ($0 < u \leq 0 \Delta u$) $\Rightarrow$ a secondo
mento compenire un termine aggiuntivo

$$\int_{\Omega} u^2 \left(\int_{\Omega} u u_x \quad \int_{\Omega} u \Delta u \right)$$

che però non dà problemi (vedi anche (12))

lascio a voi come esercizio.

~~Analizziamo l'ordine come esercizio
effettivo e la dimostrazione
del teorema nel caso
 $n=2$, dove la dimostrazione è
semplice.~~

Schema della dimostrazione

(11h's)

- (i) costruzione di soluzioni approssimate u_n
- (ii) stima di u_n indipendente da n
- (iii) Studiare, a meno di sottosequenze, la convergenza debole e forte in spazi funzionali opportuni di u_n a u
- (iv) Provare che u è soluzione debole di (P_W)
- v) mostrare che $t \mapsto u(t)$ è continua
- (vi) mostrare che $u_0 \mapsto u(t)$ è continua + unicità

(12) Dimostrazione.

(1) Poiché V è un Hilbert separabile $\Rightarrow$
 $\exists$ un sistema numerabile denso in V .

Potremo sempre costruire $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ sistema
 una successione di elementi

di V linearmente indipendenti

con $\{v_j\}$ denso in V . Ricordiamo inoltre

che poiché V è denso in $H \Rightarrow \{v_j\}$ è
 denso in H . (terza tesi)

Costruiamo $V_n = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ (Span)

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n \subset V_{n+1}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = V_{\infty} \subset V \subset H$$

denso denso

$$\in C^1([0, T], V_n)$$

Cerchiamo una funzione $u_n(t)$ della forma

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) v_j \quad \text{con } \alpha_j \in C([0, T_{\max})) \text{ s.l. di}$$

$$(P_n) \quad \begin{cases} (u'_n, v) + a_D(u_n, v) + (f(u_n), v) = \langle g_n, v \rangle & \forall v \in V_n \\ u_n(0) = \tilde{u}_n \end{cases} \quad \forall t \in [0, T]$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^n \alpha'_j(t) (v_j, v) + \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) a_D(v_j, v) + \left(f\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j(t) v_j \right), v \right) \right) = \\ & (\alpha_j(0) = \tilde{u}_{nj} \in \mathbb{R}) = \langle g_n(t), v \rangle \\ & u_n(0) = \tilde{u}_n = \sum_{j=1}^n \tilde{u}_{nj} v_j \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \forall v \in V_n \\ & \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

dove $\tilde{u}_n \rightarrow u_0$ in H con $\tilde{u}_n \in V_n$ (V denso in H)

$g_n \rightarrow g$ in $L^2(0, T, V')$ con $g_n \in C^0([0, T], V')$
 (derivata debole)

Prendiamo in P_n $v = v_i$ con $1 \leq i \leq n$ (13)

- Allora otteniamo il sistema ^{di ODE} non lineare del 1° ordine: (ciufor non normale)

$$\textcircled{*} \begin{cases} \sum_{j=1}^n (v_j, v_i) \alpha_j'(t) + \sum_{j=1}^n q_{ij}(v_j, v_i) \alpha_j(t) = \\ = \langle g_n(t), v_i \rangle - \langle f(\sum_{j=1}^n \alpha_j(t) v_j), v_i \rangle \\ \alpha_j(0) = \tilde{u}_{mj} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Osserviamo che il secondo membro $\in C^0([0, T])$

- Inoltre il termine non lineare è localmente lipschitziano ($f \in C^1(\mathbb{R})$) e $\alpha_j \in C^1([0, T])$.

Consideriamo ora la matrice $A = \|(v_i, v_j)\| = D$

~~Il determinante della matrice A è diverso da zero~~

$\det A \neq 0$ poiché $\{v_i\}$ sono linearmente indipendenti (sia in V che in H).

$\Rightarrow \exists A^{-1}$ e il sistema si può scrivere in forma normale.

A questo punto applichiamo il teorema di $\exists!$ locale per sistemi di ODE del 1° ordine

$\Rightarrow$ il sistema $\textcircled{*}$ ammette 1! soluzione massimale $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in C^1([0, T^*], \mathbb{R}^n)$

con $0 < T^* \leq T$. Quindi il sistema (P_n) ammette 1! soluzione $u_n \in C^1([0, T^*], V_n)$ (debole).

14 (ii) Ora andiamo a provare delle stime a priori che ci permetteranno
 $\Gamma^4 \rightarrow \Gamma$ monofamento
 $u_n \rightarrow u$ passaggio al limite in q che forma.

Prendo il problema (P_n) e pongo $v = u_n(t) \in V_n$.

Troviamo: $(f(y)y \geq -k + d_2 y^6) = \int_{\Omega} f(u_n(t)) u_n(t)$

$$\bullet (u'_n(t), u_n(t)) + a_D(u_n(t), u_n(t)) + (f(u_n(t)), u_n(t)) =$$

$\downarrow$
coercive

$$= \langle g_n(t), u_n(t) \rangle$$

$$\bullet \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n(t)\|_H^2 + C_P \|u_n(t)\|_V^2 - k|\Omega| + d_2 \int_{\Omega} |u_n(t)|^6 \leq$$

(H2)

$$\leq \|g_n(t)\|_V, \|u_n(t)\|_V$$

Applico disuguaglianza Young a $\frac{1}{2}$ membro

$$\bullet \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n(t)\|_H^2 + \frac{C_P}{2} \|u_n(t)\|_V^2 + d_2 \|u_n(t)\|_V^6 \leq$$

$$\leq k|\Omega| + \frac{1}{2C_P} \|g_n(t)\|_V^2$$

$$\bullet \frac{d}{dt} \|u_n(t)\|_H^2 + C_P \|u_n(t)\|_V^2 + 2d_2 \|u_n(t)\|_V^6 \leq$$

(*)

$$\leq 2k|\Omega| + \frac{1}{C_P} \|g_n(t)\|_V^2$$

$$\bullet \frac{d}{dt} \|u_n(t)\|_H^2 + C_P \|u_n(t)\|_H^2 \leq 2k|\Omega| + \frac{1}{C_P} \|g_n(t)\|_V^2$$

(**)

N.B nel caso $K=N$ la (***) va sostituita con

$$\frac{d}{dt} \|u_n(t)\|_H^2 \leq 2 \|u_n(t)\|_H^2 + 2k|\Omega| + \frac{1}{C_P} \|g_n(t)\|_V^2$$

ma per $\uparrow$ a causa di $f(u) = f(u) - u$

Applico il lemma di Gronwall

(15)

$$\bullet \|u_m(t)\|_H^2 \leq \|\tilde{u}_m\|_H^2 e^{-\tilde{c}_P t} + \int_0^t e^{-\tilde{c}_P(t-s)} \left[2k|s| + \frac{1}{C_F} \|g_m(s)\|_{V'}^2 \right] ds$$

Poiché $\tilde{u}_m \xrightarrow{H} u_0$ e $g_m \rightarrow g$ in $L^2(0,T;V')$ $\Rightarrow$

$$\exists C > 0: \|\tilde{u}_m\|_H^2 \leq C \|u_0\|_H^2 \quad \|g_m\|_{L^2(0,T;V')}^2 \leq C \|g\|_{L^2(0,T;V')}^2$$

e quindi si ottiene:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \|u_m(t)\|_H^2 &\leq C(\mathcal{Q}) \left[\|u_0\|_H^2 e^{-\tilde{c}_P t} + \int_0^t e^{-\tilde{c}_P(t-s)} [k + \|g(s)\|_{V'}^2] ds \right] \\ &\leq C(\mathcal{Q}) \left\{ \|u_0\|_H^2 + kT + \|g\|_{L^2(0,T;V')}^2 \right\} \quad \forall t \in [0,T] \end{aligned}$$

grazie a questa stima è possibile individuare la soluzione u_m del problema (P_m) di pag 12 su tutto $[0,T]$ (Teorema di prolungamento) $\Rightarrow \boxed{u_m \in C^1([0,T];V_m)}$.

Inoltre $\exists C$ indipendente da m :

$$\textcircled{1} \|u_m\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq C(T, \mathcal{Q}, u_0, g)$$

osserviamo che se $k=0$ in (2) e $g=0$ dalle $\textcircled{1} \Rightarrow$
 $\|u_m(t)\|_H^2 \leq C(\mathcal{Q}) \|u_0\|_H^2 e^{-\tilde{c}_P t}$
 Quindi per $t \rightarrow +\infty \Rightarrow$ si ha stima di decadimento a zero!

• Ritorniamo alla stima $\otimes$ della pag. precedente e integriamola su $(0,T)$. Otteniamo

$$\begin{aligned} \bullet \|u_m(T)\|_H^2 &= \|u_m(0)\|_H^2 + \tilde{c}_P \int_0^T \|u_m(s)\|_H^2 ds + \\ &+ 2\alpha_2 \int_0^T \|u_m(s)\|_{L^6(\Omega)}^6 ds \leq \int_0^T \left(2k|s| + \frac{1}{C_F} \|g_m(s)\|_{V'}^2 \right) ds \end{aligned}$$

6.10 Nel caso $k=N$ se applico Gronwall alla stima con stime a priori

$$\|u_m(t)\|_H^2 \leq C(\mathcal{Q}) \left[\|u_0\|_H^2 e^{2t} + \int_0^t (k + \|g(s)\|_{V'}^2) ds \right] \Rightarrow$$

Anche se $k=0$ e $g=0$ non ha decadimento a zero

16) Quindi maggiorando $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} C_P \int_0^T \|u_m(s)\|_V^2 ds + 2\alpha_2 \int_0^T \|u_m(s)\|_{L^6(\Omega)}^6 ds &\leq \\ &\leq \|u_m(0)\|_H^2 + \int_0^T (2k|S| + \frac{1}{C_P} \|f_m(s)\|_V^2) ds \\ &\leq C(\Omega) (\|u_0\|_H^2 + \int_0^T (k + \|f(s)\|_V^2) ds) \\ &\leq C(T, f, g, u_0, \Omega) \quad \text{indipendente da } n \end{aligned}$$

Abbiamo quindi provato altre due stime a priori:

$$\textcircled{2} \quad \|u_m\|_{L^2(0,T;V)} \leq C(T, f, g, u_0, \Omega)$$

$\Rightarrow u_m$ converge
debolmente
in
 $L^2(0,T;V)$

$$\textcircled{3} \quad \|u_m\|_{L^6(\Omega \times (0,T))} \leq C(T, f, g, u_0, \Omega)$$

per lemmi
Bouché-Alaï
(settoriemme)

Inoltre se ci ricordiamo dell'orizzontale

di pag 8 si ricava analogamente:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} |f(u_m)|^{\frac{6}{5}} &\leq \int_0^T \int_{\Omega} [B(1 + |u_m|^5)]^{\frac{6}{5}} \leq \\ &\leq C \left\{ \int_0^T \int_{\Omega} 1 + \int_0^T \int_{\Omega} |u_m|^6 \right\} \leq C \left\{ T|S| + \|u_m\|_{L^6(\Omega \times (0,T))}^6 \right\} \\ &\leq C(T, f, g, u_0, \Omega) \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad \|f(u_m)\|_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega \times (0,T))} \leq C(T, f, g, u_0, \Omega)$$

Stime a priori che abbiamo ricavato

$$(1) \|u_m\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq C(T, f, g, u_0, \Omega)$$

$$(2) \|u_m\|_{L^2(0,T;V)} \leq C(T, f, g, u_0, \Omega)$$

$$(3) \|u_m\|_{L^6(\Omega \times (0,T))} \leq C(T, f, g, u_0, \Omega)$$

$$(4) \|f(u_m)\|_{L^{6/5}(\Omega \times (0,T))} \leq C(T, f, g, u_0, \Omega)$$

Ricordiamo che $u_m \in C^1([0,T]; V_m)$
e dunque si:

$$\begin{cases} (u'_m, v) + a_D(u_m, v) + (f(u_m), v) = (g_m, v) \\ u_m(0) = \tilde{u}_m \end{cases} \quad \forall v \in V_m$$

Quindi se considero $v \in V \Rightarrow v = \tilde{v} + \tilde{v}^\perp$

allora ottengo $\tilde{v} = P_V$ su V_m con $\tilde{v} \in V_m$ proiezione

$$(u'_m, v) = (u'_m, \tilde{v}) = -a_D(u_m, \tilde{v}) - (f(u_m), \tilde{v}) + (g_m, \tilde{v})$$

$$\Rightarrow |(u'_m, v)| \leq \left| \int_{\Omega} (\nabla u_m \nabla \tilde{v}) \right| + \left| \int_{\Omega} (f(u_m) \tilde{v}) \right| + \|g_m\|_V \|\tilde{v}\|_V \leq$$

$$\leq \|\nabla u_m\| \|\nabla \tilde{v}\| + \|f(u_m)\|_{L^{6/5}(\Omega)} \|\tilde{v}\|_{L^6(\Omega)} + \|g_m\|_V \|\tilde{v}\|_V$$

$$\Rightarrow |\langle u'_m(u), v \rangle| \leq \| \nabla u_m(u) \| \| v \|_V + \\ + \| f(u_m(u)) \|_{L^{6/5}(\Omega)} \| v \|_V + \\ + \| g_m(u) \|_{V'} \| v \|_V$$

Ricordiamo infatti dal teo. precedente
 $\| \tilde{v} \|_V \leq \| v \|_V$ (e inoltre $\| \tilde{v} \|_{L^6(\Omega)} \leq \| \tilde{v} \|_V$)

$$\Rightarrow \| u'_m(u) \|_{V'} \leq \| \nabla u_m(u) \| + \| g_m(u) \|_{V'} + \\ + \| f(u_m(u)) \|_{L^{6/5}(\Omega)}$$

$u'_m(u)$ è quindi un elemento di V' .

Inoltre si ha:

$$\| u'_m(u) \|_{V'}^{6/5} \leq \| \nabla u_m(u) \|^{6/5} + \| g_m(u) \|_{V'}^{6/5} + \\ + \int_{\Omega} |f(u_m(u))|^{6/5} \leq$$

$$\leq C \left\{ 1 + \| \nabla u_m(u) \|^2 + \| g_m(u) \|_{V'}^2 \right\} \\ + \int_{\Omega} |f(u_m(u))|^{6/5}$$

$$\Rightarrow \int_0^T \| u'_m(u) \|_{V'}^{6/5} dt \leq C \left\{ 1 + \int_0^T \| \nabla u_m(u) \|^2 dt + \int_0^T \| g_m(u) \|_{V'}^2 dt \right. \\ \left. + \int_0^T \int_{\Omega} |f(u_m(u))|^{6/5} dt \right\}$$

e infine

$$\|u_m'\|_{L^{6/5}(0,T;V')}^{6/5} \leq C \left\{ 1 + \|u_m\|_{L^2(0,T;V)}^2 + \|g_m\|_{L^2(0,T;V)}^2 + \|f(u_m)\|_{L^{6/5}(\Omega \times (0,T))}^{6/5} \right\}$$

grazie alle norme H e V e al fatto
che $g_m \rightarrow g$ in $L^2(0,T;V)$ $\Rightarrow$

$$(5) \|u_m'\|_{L^{6/5}(0,T;V')} \leq C(T, F, g, u_0, \Omega)$$

A questo punto applico il Teorema 8.1
(pag 216) del Robinson:

Teorema Sia $V \subset H \subset V'$, terza topologia

con V riflessivo. Sufficiente che

- $\|u_m\|_{L^2(0,T;V)}$ sia limitato uniformemente
- $\|u_m'\|_{L^p(0,T;V')}$ sia limitato uniformemente
per qualche $p > 1$ -

Allora $\exists$ una sotto successione che
converge fortemente in $L^2(0,T;H)$

Nel nostro caso si può applicare
con $\boxed{p = \frac{6}{5}}$

(20)

$\Rightarrow \exists u \in L^2(0, T; H)$:

$u_m \rightarrow u$ forte in $L^2(0, T; H)$

(e meno di una sottosequenza)

$\Rightarrow u_m \rightarrow u$ q.o. in $\Omega \times (0, T)$

(e meno di una sottosequenza)

~~$\Rightarrow u_m \rightarrow u$ in $L^2(0, T; H) \Rightarrow u \in L^2(0, T; H)$~~

Ricordiamo ora che $\|f(u_m)\|_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega \times (0, T))} \leq C$

Quindi $\exists \chi \in L^{\frac{6}{5}}(\Omega \times (0, T))$ t.c. indep. da m

$f(u_m) \rightharpoonup \chi$ in $L^{\frac{6}{5}}(\Omega \times (0, T))$

(e meno di una sottosequenza)

Ora dobbiamo applicare la Lemma

(vedi Lemma 8.3 del Robinson)

che è un analogo del teorema della convergenza dominata

Lemma: Se $\{h_j\}$ è limitato in $L^p(\Omega \times (0, T))$

Se $h_j \rightarrow h$ q.o. in $\Omega \times (0, T)$

Allora $h_j \rightarrow h$ in $L^p(\Omega \times (0, T))$

Nel nostro caso: $\|f(u_m)\|_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega \times (0, T))} \leq C$

$u_m \rightarrow u$ q.o. in $\Omega \times (0, T) \Rightarrow f(u_m) \rightarrow f(u)$ q.o. in $\Omega \times (0, T)$

$\Rightarrow f(u_m) \rightarrow f(u)$ in $L^{\frac{6}{5}}(\Omega \times (0, T))$

(iv) Vogliamo ora provare che se u che abbiamo trovato risolve il problema originario $\begin{cases} u' + A_K u + f(u) = g \\ u(0) = u_0 \end{cases}$ (2)

Riprendiamo lo schema approssimato:

$$(*) (u'_m(t), v) + a(u_m(t), v) + (f(u_m(t)), v) = (g_m(t), v)$$

dove prendiamo $v \in V_m, \forall m \leq n$ con m fissato ($V_m \subset V_n$) ($\otimes$ heureka!)

Integrando (*) su $(0, t)$ con $0 < t < T$:

$$(u_m(t), v) - (u_m(0), v) + \int_0^t a(u_m(s), v) ds + \int_0^t (f(u_m(s)), v) ds = \int_0^t (g_m(s), v) ds$$

$$(u_m(t), v) + \int_0^t a(u_m(s), v) ds + \int_0^t (f(u_m(s)), v) ds =$$

$$= (\tilde{u}_m, v) + \int_0^t (g_m(s), v) ds \quad L^2(0, T; H)$$

Sufficiente è che $u_m(t) \rightarrow u(t)$ forte in V e converga debolmente in $L^2(0, T; V)$ (Teo Banach Alloghi)
 $\Rightarrow (u_m(t), v) \rightarrow (u(t), v)$

$$\Rightarrow \int_0^t a(u_m(s), v) ds \rightarrow \int_0^t a(u(s), v) ds$$

Tuoltre $f(u_m) \rightarrow f(u)$ in $L^6(\Omega \times (0, T))$

$$\Rightarrow \int_0^t (f(u_m(s)), v) ds = \int_0^t \underbrace{(f(u_m(s)), v \chi(s))}_{\in L^6(\Omega \times (0, T))} \rightarrow \int_0^t (f(u(s), v) ds$$

!! Sempre per sottocorroni !!

22) Abbiamo anche

$$\bullet (\tilde{u}_m, v) \rightarrow (u_0, v) \quad (\tilde{u}_m \rightarrow u_0 \text{ forte in } H)$$

$$\bullet \int_0^t \langle g_m(s), v \rangle ds \rightarrow \int_0^t \langle g(s), v \rangle ds$$

$$(g_m \rightarrow g \text{ in } L^2(0, T; V))$$

Per definitività, passando al limite per $n \rightarrow \infty$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \textcircled{\infty} (u(t), v) + \int_0^t a(u(s), v) ds + \int_0^t (f(u(s), v)) ds = \\ = (u_0, v) + \int_0^t \langle g(s), v \rangle ds \end{aligned}$$

$$\forall v \in V_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

A questo punto, univoco ha dimostrato che

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m \text{ in } V \Rightarrow \boxed{(\infty) \text{ vale } \forall v \in V}$$

$$\begin{aligned} (u(t), v) + \int_0^t a(u(s), v) ds + \int_0^t (f(u(s), v)) ds = \\ \textcircled{\infty} = (u_0, v) + \int_0^t \langle g(s), v \rangle ds, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Se poniamo $t=0$

$$(u(0), v) = (u_0, v) \quad \forall v \in V \quad (V \text{ denso in } H) \Rightarrow$$

$$\boxed{u(0) = u_0} \Rightarrow \text{condizione iniziale di } (u) \text{ ok!!}$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{Insomma, dato che } (u(t), v) = (u_0, v) \quad \forall v \in V \\ &\quad \quad \quad t \rightarrow 0^+ \quad \quad \quad (V \text{ denso in } H) \\ &\Rightarrow \boxed{u(t) \rightarrow u_0 \text{ in } H \text{ per } t \rightarrow 0^+} \end{aligned} \right\}$$

Non usano solo le informazioni sulle u (23)

- Riprendiamo la (P_0) e la riscriviamo come

$$(u'(t), v) = \langle F_1(t), v \rangle + \langle F_2(t), v \rangle \quad \forall v \in V$$

dove

$$\langle F_1(t), v \rangle = - \int_0^t a_D(u(s), v) ds + (u_0, v) + \int_0^t \langle g(s), v \rangle ds$$

$$\langle F_2(t), v \rangle = - \int_0^t \langle f(u(s)), v \rangle ds$$

- Otteniamo che:

$$F_1 \in H^1(0, T; V') \quad F_2 \in W^{1, \frac{6}{5}}(0, T; L^{\frac{6}{5}}(\Omega))$$

Quindi $u(t)$ è derivabile (nel senso delle distribuzioni) e vale:

$$(u'(t), v) = -a_D(u(t), v) + \langle g(t), v \rangle - \langle f(u(t)), v \rangle$$

$\forall v \in V \Rightarrow u$ è soluzione di (P_W) . Inoltre

$$u'(t) = -A_D u(t) + g(t) - f(u)$$

- Abbiamo quindi trovato una soluzione u di (P_W) :
 $u \in \cancel{L^2(0, T; V)} \cap L^2(0, T; V), u' \in L^2(0, T; V') + L^{\frac{6}{5}}(\Omega \times (0, T))$

(*) Osserviamo poiché $u \in C^0([0, T]; H) \Rightarrow t \mapsto u(t)$ è continua da $[0, T] \rightarrow H$.

(!!) Attenzione!! Con questa tecnica ho trovato una soluzione - Non è detto che sia l'unica - Potrei costruire un'altra u

- e partire da un diverso problema approssimativo e mille esclude che ci possa essere una sol. che non deriva da alcuna (P_n) .
- Provaremo l'unicità come conseguenza della stima di dipendenza continua

(*) Potrei stimare uniformi su $u_n \Rightarrow$
 $u \in L^2(0, T; V) \cap L^6(\Omega \times (0, T))$ Inoltre $u' \in L^2(0, T; V') + L^{\frac{6}{5}}(\Omega \times (0, T))$
 $\Rightarrow$ Attenzione! osserviamo (*) $\Rightarrow u \in C^0([0, T]; H)$ e risolve (P_W)

24 (vi) Consideriamo i problemi (Pw) con dati:

$u_{01}, u_{02} \in H$

$g_1, g_2 \in L^2(0,T; V')$

e consideriamo le corrispondenti soluzioni u_1, u_2 :

$u_1, u_2 \in C^0([0,T]; H) \cap L^2(0,T; V)$

$u_1', u_2' \in L^2(0,T; V') + L^{\frac{6}{5}}(\Omega \times (0,T)) \subset L^{\frac{6}{5}}(0,T; V')$

Considero il problema alle differenze

e pongo $U = u_1 - u_2$ - allora si ha:

$$\begin{aligned} \langle U', v \rangle + a_D(U, v) + (f(u_1(t)) - f(u_2(t)), v) &= \\ &= \langle g_1(t) - g_2(t), v \rangle, \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Prendo $v = U = u_1 - u_2 \in L^2(0,T; V)$

$\Rightarrow \forall t \Rightarrow U(t) \in V \text{ q.o. } t \in [0, T].$

$$\begin{aligned} \langle U', U \rangle + a_D(U, U) + (f(u_1(t)) - f(u_2(t)), U) &= \\ &= \langle g_1(t) - g_2(t), U \rangle \end{aligned}$$

~~Ripetendo poi arg. conti. fin. fatti~~

~~(vedi pag. 17/18/19) trovo le stime di~~

~~$\|u_1 - u_2\|_{C^0([0,T]; H)} \leq C(f, g) (\|u_{01} - u_{02}\|_H + \|g_1 - g_2\|_{L^2(0,T; V')})$~~

~~$\|u_1 - u_2\|_{L^2(0,T; V)} \leq C(f, g) (\|u_{01} - u_{02}\|_H + \|g_1 - g_2\|_{L^2(0,T; V')})$~~

~~Se poniamo $u_{01} = u_{02}$ e $g_1 = g_2 \Rightarrow u_1 = u_2$~~

~~$\Rightarrow$ unicità della soluzione. C.V.D. $\square$~~

~~$\Rightarrow$ vedi pag. 17/18/19~~

Allora si ha

(24
m/s)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \nabla u \|_H^2 + a_p(\nabla u, \nabla u) + (f(u_1) - f(u_2), \nabla u) \\ &= \langle g_1(u) - g_2(u), \nabla u \rangle \quad (H^3 + \text{derivata}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \nabla u \|_H^2 + c_p \| \nabla u \|_V^2 - \delta \| \nabla u \|_H^2 \leq \\ & \leq \| g_1(u) - g_2(u) \|_V \| \nabla u \|_V \end{aligned}$$

Applichiamo d'imp. di Young al 2° membro

$$\begin{aligned} \odot \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \nabla u \|_H^2 + \frac{c_p}{2} \| \nabla u \|_V^2 &\leq \delta \| \nabla u \|_H^2 + \\ &+ \frac{1}{2c_p} \| g_1(u) - g_2(u) \|_V^2 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \| \nabla u \|_H^2 \leq 2\delta \| \nabla u \|_H^2 + \frac{1}{c_p} \| g_1(u) - g_2(u) \|_V^2$$

Applico lemma di Gronwall:

$$\| \nabla u \|_H^2 \leq \| \nabla u_0 \|_H^2 e^{2\delta t} + \frac{1}{c_p} \int_0^t e^{2\delta(t-s)} \| g_1(u) - g_2(u) \|_V^2 ds$$

maggioriamo:

$$\begin{aligned} \| u_1(t) - u_2(t) \|_H^2 &\leq \| u_{01} - u_{02} \|_H^2 e^{2\delta t} + \\ &+ \frac{1}{c_p} e^{2\delta t} \| g_1 - g_2 \|_{L^2(0,T;V)}^2 \end{aligned}$$

$$\| u_1 - u_2 \|_{C^0([0,T];H)}^2 \leq C(F,T,\Omega) \cdot$$

$$\cdot \left(\| u_{01} - u_{02} \|_H^2 + \| g_1 - g_2 \|_{L^2(0,T;V)}^2 \right)$$

~~Q.E.D.~~

Integrale ② su $[0, T]$ otteniamo

(24
ter)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|v(T)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|v(0)\|_H^2 + \frac{C_F}{2} \int_0^T \|v(t)\|_V^2 dt \leq \\ & \leq \gamma \int_0^T \|v(t)\|_H^2 dt + \frac{1}{2C_F} \int_0^T \|f_1(t) - f_2(t)\|_{V'}^2 dt \end{aligned}$$

maggioriamo:

$$\bullet \frac{C_F}{2} \int_0^T \|v(t)\|_V^2 dt \leq \frac{1}{2} \|v(0)\|_H^2 + \gamma \int_0^T \|v(t)\|_H^2 dt + \frac{1}{2C_F} \int_0^T \|f_1(t) - f_2(t)\|_{V'}^2 dt$$

$$\bullet \int_0^T \|v(t)\|_V^2 dt \leq C \left\{ \|u_1 - u_2\|_H^2 + \int_0^T \|f_1(t) - f_2(t)\|_{V'}^2 dt + \int_0^T \|v(t)\|_H^2 dt \right\}$$

$$\bullet \|u_1 - u_2\|_{L^2(0,T;V)}^2 \leq C \left\{ \|u_1 - u_2\|_H^2 + \|f_1 - f_2\|_{L^2(0,T;V')}^2 + \|u_1 - u_2\|_{L^2(0,T;H)}^2 \right\}$$

Usa la stima già trovata per $u_1 - u_2$ in $C^0([0,T];H)$

$$\Rightarrow \|u_1 - u_2\|_{L^2(0,T;V)}^2 \leq C(F,T,\gamma) \cdot \left\{ \|u_1 - u_2\|_H^2 + \|f_1 - f_2\|_{L^2(0,T;V')}^2 \right\}$$

Se poniamo $u_1 = u_2$ e $f_1 = f_2 \Rightarrow u_1 = u_2$
UNICITÀ DELLA SOLUZIONE CVD $\square$

Vogliamo ora trovare delle stime (25)
 di ordine superiore, in ipotesi
 di dati più regolari per poi provare
 l'esistenza di una soluzione forte

H^4_{bis}

$u_0 \in V$

H^8_{bis}

$g \in L^2([0, T]; H)$

(con regolarizzazione)

Teorema Nelle ipotesi $(H_1) - (H_6)$

$(H_4)_{\text{bis}} - (H_5)_{\text{bis}}$

ogni soluzione debole

u di (P_u) soddisfa ~~le~~ le ulteriori stime

• $u \in L^\infty([0, T]; V)$ • $u \in L^2([0, T]; H)$

Inoltre: • $f(u) \in L^\infty([0, T]; L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}))$ ed $\exists C = C(\omega, f, g, u_0, T): (*)$

N.B.: Questo non vuol dire ancora che il

problema ha una soluzione forte.

N.B.: Tutte le cose fin viste per la soluzione debole valgono!!!

Dimostrazione: Sia una soluzione di $P_u \Rightarrow$

$$(P_u) \quad \langle u'_m(t), v \rangle + a_D(u_m(t), v) + (f(u_m(t)), v) = \langle g_m(t), v \rangle \quad \forall v \in V_m$$

$$u_m(0) = \tilde{u}_m$$

$$\text{con } \tilde{u}_m \rightarrow u_0 \text{ in } V, \quad \tilde{u}_m \in V_m$$

$$g_m \rightarrow g \text{ in } L^2([0, T]; H) \quad \text{con } g_m \in C^0([0, T]; H)$$

Sapriamo che $u_m \in C^1([0, T]; V_m)$ come nel precedente teorema

$$\Rightarrow \text{scelgo } v = \underline{u'_m(t)} \in V_m, \quad \forall t \in [0, T]$$

$$(u'_m(t), u'_m(t)) + a_D(u_m(t), u'_m(t)) + (f(u_m(t)), u'_m(t)) = \langle g_m(t), u'_m(t) \rangle$$

$$(*) \quad \|u\|_{L^\infty([0, T]; V)} \leq C; \quad \|u'\|_{L^2([0, T]; H)} \leq C; \quad \|f(u)\|_{L^\infty([0, T]; L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}))} \leq C$$

26) Ricaviamo:

$$\begin{aligned} & \cdot \|u'_m(t)\|_H^2 + \int_{\mathbb{R}} \nabla u_n(t) \nabla u'_m(t) + \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} F(u_m(t)) \\ & = \langle g_n(t), u'_m(t) \rangle \end{aligned}$$

dove $\mathcal{F}(y)$ è la primitiva di $F(y)$: $\mathcal{F}(y) = \int_0^y f(z) dz$

$$\cdot \|u'_m(t)\|_H^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \nabla u_m \|^2_H + \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(u_m(t)) = \langle g'_m(t), u'_m(t) \rangle$$

$$\cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \| \nabla u_m \|^2_H + \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(u_m(t)) \right] + \| u'_m(t) \|^2_H = \langle g'_m(t), u'_m(t) \rangle$$

Applico Young al II° membro $\Rightarrow$

$$\odot \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \| \nabla u_m \|^2_H + \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(u_m(t)) \right] + \frac{1}{2} \| u'_m(t) \|^2_H \leq \frac{1}{2} \| g'_m(t) \|^2_H$$

Abbiamo bisogno di una stima per $\mathcal{F}(y)$

Si può mostrare (Esercizio) che $\exists \tilde{k}, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 > 0$:

$$-\tilde{k} + \tilde{\alpha}_2 y^6 \leq \mathcal{F}(y) = \int_0^y f(z) dz \leq \tilde{k} + \tilde{\alpha}_1 y^6$$

Dim:

• Se $y: |y| \leq 1 \Rightarrow |f(y)| \leq K$ ($f \in C([-1,1])$)

• Se $y > 1$: $\mathcal{F}(y) = \underbrace{\int_0^1 f(z) dz}_{\text{limitato}} + \int_1^y f(z) dz$

$$\int_1^y \frac{k + \alpha_2 z^6}{z} dz \leq \int_1^y f(z) dz = \int_1^y \frac{f(z)z}{z} dz \leq \int_1^y \frac{k + \alpha_1 z^6}{z} dz$$

$$\int_1^y \frac{k + \alpha_2 z^6}{z} dz \leq -\tilde{\alpha}_3 + \tilde{\alpha}_2 y^6 \leq$$

where $y < -1$
quale a
 $y > 1$

$$\leq \int_1^y (k + \alpha_1 z^5) dz \leq C_1 y + C_2 y^6 + C_3 \leq \tilde{C}_2 y^6 + \tilde{C}_3$$

Oro integrale 0 su $(0, t)$ ($0 < t \leq T$): (27)

$$\bullet \frac{1}{2} \|\nabla u_m(t)\|_H^2 + \int_{\Omega} f(u_m(t)) + \frac{1}{2} \int_0^t \|u u'_m(s)\|_H^2 ds \leq \\ \leq \frac{1}{2} \|\nabla u_m(0)\|_H^2 + \int_{\Omega} f(u_m(0)) + \frac{1}{2} \int_0^t \|g_m(s)\|_H^2 ds$$

use it in Ω for minorare e per maggiorare

$$\bullet \frac{1}{2} \|\nabla u_m(t)\|_H^2 - \tilde{K}|\Omega| + \tilde{\alpha}_2 \int_{\Omega} |u_m(t)|^6 + \frac{1}{2} \int_0^t \|u u'_m(s)\|_H^2 ds \leq \\ \leq \frac{1}{2} \|\nabla \tilde{u}_m\|_H^2 + \tilde{K}|\Omega| + \tilde{\alpha}_1 \int_{\Omega} |\tilde{u}_m|^6 + \frac{1}{2} \int_0^t \|g_m(s)\|_H^2 ds$$

$$\bullet \frac{1}{2} \|\nabla u_m(t)\|_H^2 + \tilde{\alpha}_2 \|u_m(t)\|_{L^6(\Omega)}^6 + \frac{1}{2} \int_0^t \|u u'_m(s)\|_H^2 ds \leq \\ \leq 2\tilde{K}|\Omega| + \frac{1}{2} \|\nabla \tilde{u}_m\|_H^2 + \tilde{\alpha}_1 \|\tilde{u}_m\|_{L^6(\Omega)}^6 + \int_0^T \|g_m(s)\|_H^2 ds$$

Ricordiamo che $\tilde{u}_m \rightharpoonup u_0$ in $V = H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$

$g_m \rightarrow g$ in $L^2(0, T; H)$ $\Rightarrow$

$\exists c > 0$:

$$\bullet \Rightarrow \|\nabla \tilde{u}_m\|_H^2 \leq C \|\nabla u_0\|_H^2 \\ \|\tilde{u}_m\|_{L^6(\Omega)}^6 \leq C \|u_0\|_{L^6(\Omega)}^6 \leq C \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^6$$

Teo. im.

$$\|g_m\|_{L^2(0, T; H)}^2 \leq C \|g\|_{L^2(0, T; H)}^2$$

$$\bullet \boxed{\|\nabla u_m(t)\|_H^2 + \|u u_m(t)\|_{L^6(\Omega)}^6 \leq C(T, u_0, g, f)}$$

$$\bullet \int_0^t \|u u'_m(s)\|_H^2 ds \leq C(T, u_0, g, f) \Rightarrow$$

$$\bullet \boxed{\int_0^T \|u u'_m(s)\|_H^2 ds \leq C(T, u_0, g, f)}$$

multiplicando per u_m

28) Riassumendo abbiamo trovato che:
 (Saperemo fra che $\|u_m\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq C(T)$)

$$\left. \begin{aligned} & \bullet \|u_m\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq C(T, f, u_0, g, \Omega) \\ & \bullet \|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^6(\Omega))} \leq C(T, f, u_0, g, \Omega) \\ & \bullet \|u_m\|_{L^2(0,T;H)} \leq C(T, f, u_0, g, \Omega). \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Superfluo}$$

Inoltre si ha:

$$|f(u_m(t))| \leq \beta(1 + |u_m(t)|^5)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(u_m(t))|^{\frac{6}{5}} & \leq \int_{\Omega} (\beta(1 + |u_m(t)|^5))^{\frac{6}{5}} \leq \\ & \leq C \left\{ \int_{\Omega} 1 + \int_{\Omega} |u_m(t)|^6 \right\} \\ & \leq C(|\Omega| + \|u_m(t)\|_{L^6(\Omega)}^6) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|f(u_m)\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{6}{5}}(\Omega))} \leq C(|\Omega| + \|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^6(\Omega))}^6)$$

$$\bullet \|f(u_m)\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{6}{5}}(\Omega))} \leq C(T, f, u_0, g, \Omega)$$

grazie alle stime a priori che
 abbiamo appena trovato possiamo
 passare al limite (per sottrazione sui):

stanno lo stesso x unicità in spazi meno regolari

$u_n \xrightarrow{*} u \uparrow$ in $L^\infty(0,T;V)$ ($\|u\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq \|u_n\|_{L^\infty(0,T;V)}$)

(29)

$u'_n \rightarrow u'$ in $L^2(0,T;H)$ ($\|u'\|_{L^2(0,T;H)} \leq \liminf \|u'_n\|_{L^2(0,T;H)}$)

$\{ f(u_n) \xrightarrow{*} \chi \text{ in } L^\infty(0,T;L^{5/3}(\Omega)) \}$ non serve

grazie a quello che abbiamo già visto per le soluzioni deboli anche in $f(u_n)$

$\Rightarrow$ possiamo passare al limite

e quindi le soluzioni deboli di

(Px) $\begin{cases} u' + A_K u + f(u) = g \\ u(0) = u_0 \end{cases}$

forte $u_n \rightarrow u$ in $C^0(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$

Soddisfare le ulteriori proprietà:

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0,T;V) \\ u' &\in L^2(0,T;H) \end{aligned}$$

continuando con le scelte:

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0,T;V) \cap C^0(0,T;H) \\ u' \in L^2(0,T;H) \\ \text{e inoltre } f(u) \in L^\infty(0,T;L^{5/3}(\Omega)) \end{cases}$$

Attenzione! Questo non vuol dire che il problema (Px) ha una soluzione forte.

Dobbiamo recuperare una ulteriore regolarità ($u(t) \in D(A)$ q.o.) ma dobbiamo fare delle ipotesi più restrittive su f .

30) Nuova ipotesi | Seppure nel caso $m=3$

$$(H2bis) \exists k \geq 0, \alpha_1, \alpha_2 > 0 :$$

$$= k + \alpha_2 y^4 \leq f(u) \leq k + \alpha_1 y^4 \quad \text{anziché } 6$$

$$\text{se vale } (H2bis) \Rightarrow |f(u)| \leq \beta (1 + |u|^3)$$

Quindi nelle ipotesi

$$(H1) \quad (H2bis) \quad (H3) \quad (H4bis) \quad (H5bis)$$

Il sistema globale u del problema (P):

$$u \in L^\infty(0, T; V)$$

$$u \in C^0([0, T]; H)$$

$$u \in L^2(0, T; H)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_0 \in V \\ f \in L^2(0, T; H) \end{array} \right\}$$

Allora, poniamo su v :

$$a(u(t), v) = \underbrace{-(u_t(t), v)}_H - \underbrace{(f(u(t)), v)}_{??} + \underbrace{(g(u), v)}_H$$

Le ultime ipotesi fatte su f , darebbero garantirci che $f(u(t)) \in H$. Infatti:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(u(t))|^2 &\leq \int_{\Omega} [\beta (1 + |u(t)|^3)]^2 \leq C \int_{\Omega} (1 + |u(t)|^6) \\ &\leq C \{ |\Omega| + \|u(t)\|_{L^6(\Omega)}^6 \} \leq C \{ |\Omega| + \|u(t)\|_V^6 \} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|f(u)\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq q(\Omega, f, u, T) \quad (3)$$

$$a_D(u(t), v) = - \underbrace{([u_t(t) + f(u(t)) - g(t)], v)}_{\in H} \quad \forall v \in V, \text{ q.o.t. } [0, T]$$

$$a_D(u(t), v) = (G(t), v) \quad \forall v \in V, \text{ q.o.t. } [0, T]$$

N.B. $G \in L^2(0, T; H)$

$$\begin{aligned} \langle A_D u(t), v \rangle &= (G(t), v) \quad \forall v \in V, \text{ q.o.t.} \\ \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla v &= \int_{\Omega} G(t) v \quad \forall v \in V, \text{ q.o.t. } [0, T] \end{aligned}$$

Applico il teo. 6.16 del Robinson (criterio di regolarità per equazioni ellittiche)

$$\int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla v = \int_{\Omega} G(t) v \quad \forall v \in V, \text{ q.o.t. } G \in H$$

$\Rightarrow u \in H^2(\Omega)$ - Possiamo quindi applicare

la formula di Green $\Rightarrow$

$$\int_{\Omega} \Delta u(t) v = \int_{\Omega} G(t) v \quad \forall v \in V \subset H_{\text{denso}}$$

$$\Rightarrow -\Delta u(t) = G(t) \quad \Rightarrow \boxed{G \in L^2(0, T; H)!!}$$

$$-\Delta u(t) = -u_t(t) - f(u(t)) + g(t) \quad \text{q.o.t. } [0, T]$$

32) Infine:

$$u_t(u) - \Delta u(u) + f(u(t)) = f(u) \quad \text{in } H$$

$$q.o.t \in [0, T]$$

$$u \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \quad (f \in L^2(0, T; H))$$

Sappiamo già che $u \in L^2(0, T; V) \Rightarrow$

$$u \in L^2(0, T; D(A))$$

dato il bordo

$$\text{Ricordiamo che: } D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\}$$

Anche qui applichiamo un risultato analogo a quelli già visti per V e V_1 , ovvero

$$\text{Teorema Sia } W_2 = \{v \in L^2(0, T; D(A)) : v_t \in L^2(0, T; H)\}$$

$$\text{Allora } W_2 \subset C^0([0, T]; V)$$

Corollario 7.3
Rabinowitz

Possiamo così concludere:

$$\text{Teorema Volpiano: (P1) (H2m) (H3) (H4m) (H5b) \bullet}$$

Allora $\exists!$ soluzione u di:

$$(P3) \begin{cases} u_t(u) + \Delta u(u) + f(u(t)) = f(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad \text{in } H \quad \forall q.o.t \in [0, T]$$

tale che

$$\bullet u \in C^0([0, T]; V) \cap L^2(0, T; D(A))$$

$$\bullet u' \in L^2(0, T; H)$$

Quindi la soluzione è forte e il dato iniziale è assunto per $t=0$

!! Unicità deriva dall'unicità della debole !!

Dichiarazione nel caso $K = \mathbb{R}, \mathbb{N}$ occorre fare (33)

un po' più di attenzione per provare che effettivamente la soluzione è forte, oppure che l'equazione vale p.o. $t \in [0, T]$ in H .
(non in senso variazionale!!)

Forma variazionale del problema:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Gamma} \alpha u v + \int_{\Omega} (G(u) v) \quad \forall v \in V$$

$\Downarrow$ eq. neg. eq. elettiche
 $u \in H^2(\Omega)$

$\Downarrow$ formula Green

$$-\int_{\Omega} \Delta u(u) v + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(u) \right) v = \int_{\Omega} G(u) v \quad \forall v \in V$$

$\Rightarrow$ vale anche $\forall v \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow$

$$-\int_{\Omega} \Delta u(u) v = \int_{\Omega} G(u) v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow -\Delta u(u) = G(u) \quad \text{p.o. } t \in [0, T]$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(u) \right) v = 0 \quad \forall v \in V \text{ densa in } H$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0} \text{ su } \partial\Omega \quad \text{Recupero la condiz. al contorno !!}$$

vedere Brezis per i dettagli

34) L'ultima cosa che vogliamo provare
 è una stima di dipendenza continua.

per la soluzione forte nelle ipotesi $\{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6\}$
 e $(H_6) |f'(y)| \leq C(1+|y|^2)$

Consideriamo $u_0, u_02 \in V$

$$g_1, g_2 \in L^2(0, T; H)$$

e le corrispondenti soluzioni forti

$$u_1, u_2 \in C^0([0, T]; V) \cap L^2(0, T; D(A))$$

Scriviamo il problema per $V = u_1 - u_2$:

$$\begin{cases} V_t - \Delta V + f(u_1) - f(u_2) = g_1 - g_2 \\ V(0) = u_{01} - u_{02} \quad V|_{\Gamma} = 0 \quad \text{in } \Gamma \end{cases}$$

Moltiplico per $-\Delta V(A) \in H$ e moltiplico
 membri dell'equazione e integro su Ω .
 otteniamo:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} V_t(A) \Delta V(A) + \int_{\Omega} (\Delta V(A))^2 - \int_{\Omega} (f(u_1) - f(u_2)) \Delta V(A) \\ = - \int_{\Omega} (g_1 - g_2)(A) \Delta V(A) \end{aligned}$$

~~Adesso sempre presente
 con la 3.3 del Robinson~~

Problema: come trattare $\left| - \int_{\Omega} v_t(x) \Delta v(x) \right|$ (35)

Formalmente:

$$- \int_{\Omega} v_t(x) \Delta v(x) = \int_{\Omega} \nabla v_t(x) \nabla v(x) - \int_{\Gamma} v_t(x) \partial_n v(x)$$

$$\begin{matrix} \cap & \cap & \cap & \cap \\ ? & H^1(\Omega) & ? & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{matrix}$$

noi sappiamo solo che $v_t \in L^2(0, T; H)$

Si può provare (non è semplice...) che:
 $se z \in L^2(\Omega) \Rightarrow \nabla z \in [H^1]^n \subset [H^1(\Omega)]^n \Rightarrow z|_{\Gamma} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) = (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^*$
 (analogo di: $se z \in H^1(\Omega) \Rightarrow \nabla z \in [L^2(\Omega)]^n \Rightarrow z|_{\Gamma} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$)

Quindi i due integrali a ∇ membro hanno senso.

Ora vogliamo calcolare $\int_{\Gamma} v_t(x) \partial_n v(x)$

sapendo che $v(x)|_{\Gamma} = 0$
 (N.B. $\forall t \in [0, T]$ $v(t)|_{\Gamma} = 0$)

Nel caso di funzioni regolari
 banalmente se $z(\cdot, t)|_{\Gamma} = 0 \Rightarrow z_t(\cdot, t)|_{\Gamma} = 0$.

Qui invece abbiamo $v_t|_{\Gamma} \in L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$

Poiché v_t è la derivata che si ottiene
 come limite (in norma $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$)

3b) rapporto incrementale

$$V_t(\cdot, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(\cdot, t+h) - V(\cdot, t)}{h}$$

$$\text{e } V(\cdot, t+h)|_{\Gamma} = 0 \quad V(\cdot, t)|_{\Gamma} = 0$$

$\Rightarrow$ è possibile provare che

$$V_t(\cdot, t)|_{\Gamma} = 0 \quad \text{nel senso di funzionali su } L^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

$$\text{ovvero } \int_{\Gamma} \underbrace{V_t(\cdot, t)}_{L^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \underbrace{\nabla_n V(u)}_{L^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0$$

Potremo quindi concludere che

$$-\int_{\Omega} V_t(u) \Delta V(u) = \int_{\Omega} \underbrace{\nabla V_t}_{(H^1(\Omega))^*} \underbrace{\nabla V}_{H^1(\Omega)}$$

Rimane ora da descrivere: $\int_{\Omega} \nabla V_t \nabla V$

Novamente applichiamo il Corollario 7.3 del Robinson:

(enough a quello
è a vista in spazi più
deboli)

Se $z \in L^2(0, T; D(A))$ e $z_t \in L^2(0, T; H) \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \nabla u \|_H^2 = \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u \quad \left| \begin{array}{l} \text{nel ns. conv} \\ D(A) = \\ = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \end{array} \right.$$

Nel nostro caso:

(37)

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla v\|_H^2$$

Riprendiamo dal punto in cui ci eravamo fermati $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla v(t)\|_H^2 + \|\Delta v(t)\|_H^2 \leq$$

$$\leq \int_{\Omega} |f(u_1(t)) - f(u_2(t))| |\Delta v(t)| + \int_{\Omega} |g_1(t) - g_2(t)| |\Delta v(t)|$$

$$\leq \int_{\Omega} |f(u_1(t)) - f(u_2(t))|^2 + \frac{1}{4} \|\Delta v(t)\|_H^2 +$$

$$+ \int_{\Omega} |g_1(t) - g_2(t)|^2 + \frac{1}{4} \|\Delta v(t)\|_H^2$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla v(t)\|_H^2 + \frac{1}{2} \|\Delta v(t)\|_H^2 \leq$$

(2 componenti $u_1(t)$ e $u_2(t)$)

$$\leq \int_{\Omega} |f'(z)|^2 |v(t)|^2 + \int_{\Omega} |g_1(t) - g_2(t)|^2 \leq$$

$$\stackrel{(46)}{\leq} C \int_{\Omega} (1 + |u_1(t)|^4 + |u_2(t)|^4) |v(t)|^2 + \int_{\Omega} |g_1(t) - g_2(t)|^2$$

Hölder

$$\leq C \left(\int_{\Omega} (1 + |u_1(t)|^6 + |u_2(t)|^6) \right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_{\Omega} |v(t)|^6 \right)^{\frac{1}{3}} +$$

$$+ \int_{\Omega} |g_1(t) - g_2(t)|^2$$

$$\frac{38}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla v(t)\|_H^2 + \frac{1}{2} \|\Delta v(t)\|_H^2 \leq$$

$$\leq C \left\{ 1 + \|u_1(t)\|_{L^6(\Omega)}^4 + \|u_2(t)\|_{L^6(\Omega)}^4 \right\} \|\nabla v(t)\|_{L^6(\Omega)}^2$$

(limit. di $\|u_i\|$ e inv. scholero)

$$\leq C(T, \Omega, f, g_i, u_{0i}) \|\nabla v(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} |g_1(t) - g_2(t)|^2$$

Poincaré

$$\leq C(T, \Omega, f, g, u_{0i}) \|\nabla v(t)\|_H^2 + \int_{\Omega} |g_1(t) - g_2(t)|^2$$

$$\textcircled{c} \frac{d}{dt} \|\nabla v(t)\|_H^2 + \|\Delta v(t)\|_H^2 \leq$$

$$\leq C(\dots) \|\nabla v(t)\|_H^2 + 2 \|g_1(t) - g_2(t)\|_H^2$$

usiamo

$$\frac{d}{dt} \|\nabla v(t)\|_H^2 \leq C(\dots) \|\nabla v(t)\|_H^2 + 2 \|g_1(t) - g_2(t)\|_H^2$$

$$\text{quoniale } (\nabla v(t) = \nabla u_{01} - \nabla u_{02})$$

$$\|\nabla v(t)\|_H^2 \leq \|\nabla(u_{01} - u_{02})\|_H^2 e^{C(\dots)t} +$$

$$+ 2 \int_0^t e^{C(\dots)(t-s)} \|g_1(s) - g_2(s)\|_H^2$$

$$\|\nabla v(t)\|_H^2 \leq C(T, \Omega, f, g, u_{0i}) \left\{ \|\nabla(u_{01} - u_{02})\|_H^2 + \|g_1 - g_2\|_{L^2(0,T;H)}^2 \right\}$$

È quindi:

(39)

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(0,T;H)}^2 \leq C(\dots).$$

$$\int \|\nabla(u_0 - v_0)\|_H^2 + \|g_1 - g_2\|_{L^2(0,T;H)}^2$$

Da cui si ricava la stima per Δv da (3)

Integrale su $(0,t)$: con $0 \leq t \leq T$

$$\|\nabla v(t)\|_H^2 = \|\nabla v(0)\|_H^2 + \int_0^t \|\Delta v(s)\|_H^2 ds$$

$$\leq C(\dots) \int_0^t \|\nabla v(s)\|_H^2 ds + 2 \int_0^t \|g_1(s) - g_2(s)\|_H^2 ds$$

ossia

$$\int_0^t \|\Delta v(s)\|_H^2 ds \leq \|\nabla(u_0 - v_0)\|_H^2 +$$

$$+ C(\dots) \|\nabla v\|_{L^2(0,T;H)}^2 + 2 \|g_1 - g_2\|_{L^2(0,T;H)}^2$$

⇓ stesso stima precedente

$$\int_0^t \|\Delta v(s)\|_H^2 ds \leq C(\dots).$$

$$\int \|\nabla(u_0 - v_0)\|_H^2 + \|g_1 - g_2\|_{L^2(0,T;H)}^2$$

È infine

$$\|\Delta v\|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq C(\dots) \left\{ \|\nabla(u_0 - v_0)\|_H^2 + \|g_1 - g_2\|_{L^2(0,T;H)}^2 \right\}$$

40) Conclusione: Nelle Hp: $(H_1)(H_2ms)(H_3)(H_4ms)$
 $(H_5ms)(H_6)$ si ha:

$$\|u_1 - u_2\|_{C^0([0,T];V)}^2 + \|u_1 - u_2\|_{L^2([0,T];D(A))}^2 \leq$$

$$\leq C_1(T, \Omega, f, g_i, u_{0i}) \left\{ \|u_{01} - u_{02}\|_V^2 + \|g_1 - g_2\|_{L^2([0,T];H)}^2 \right\}$$

Riprendiamo i due risultati

Che abbiamo ottenuto sulle

I soluzione globale e I' sol. forte
 e riferiamoci al CASO g indipendente da t

Volpono $(H_1)(H_2)(H_3)(H_4) \checkmark$

Allora $\forall u_0 \in H$ (H_4)

$\exists ! u \in C^0([0,T];H)$

Soluz. me. globale di (P_0)

Inoltre

$$\|u_1 - u_2\|_{C^0([0,T];H)} \leq C \|u_{01} - u_{02}\|_H$$

Caso ①

Volpono $H_1(H_2ms)(H_3)(H_4ms) \checkmark$

Allora $\forall u_0 \in V$ (H_4ms) (H_6)

$\exists ! u \in C^0([0,T];V)$

Soluz. me. forte di (P_3)

Inoltre

$$\|u_1 - u_2\|_{C^0([0,T];V)} \leq C \|u_{01} - u_{02}\|_V$$

Caso ②

Tra entrambi i casi posso costruire

quello che viene chiamato "sistema

semi-olonomico" (semi perché $t \geq 0$), ovvero

$\otimes g$ indipendente da t

①: $g \in V'$

②: $g \in H$

① Spazio delle fasi: $L^2(\Omega) = H$

(41)

• $S(t)u_0 = u(t) \quad \forall u_0 \in L^2(\Omega) = H$

$u(t)$ soluzione ^{debole} di (P) (*)

• $S(0)u_0 = u_0 \Rightarrow S(0) = I$

• $S(t)S(s)u_0 = S(t)u(s) = u(t+s) = S(t+s)u_0$

• $S(t)u_0$ è continuo in u_0 e in t

• $\lim_{t \rightarrow 0} S(t) = I$

• $S(t)$: Semigrupp continuo.

• Sistema dinamico $(L^2(\Omega), \{S(t)\}_{t \geq 0})$

② Spazio delle fasi $H_0^1(\Omega) = V$

• $\tilde{S}(t)u_0 = u(t) \quad \forall u_0 \in H_0^1(\Omega) = V$

$u(t)$ soluzione forte di (PS). (*)

• $\tilde{S}(0)u_0 = u_0 \Rightarrow \tilde{S}(0) = I$

(Stesse proprietà di $S(t)$)

N.B $S(t)|_{H_0^1(\Omega)} = \tilde{S}(t)$

(*) $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ famiglia a un parametro di operatori

① $S(t): H \rightarrow H$

② $\tilde{S}(t): V \rightarrow V$

(42) Conclusioni finali

- Se volessimo anche nel caso $n=3$ una creata p generica dello lavorare in spazi delle forme: $V \cap L^P(\Sigma)$ -
In questo caso la teoria è più complicata -
Soluta darò usare un sistema $\{V_j\}$ dato in V che abbia proprietà ulteriori di
- Regolarità - Più precisamente $\{V_j\}$ sarà costituito dalle autofunzioni del Laplaciano -
Anche in questo caso la teoria è più complicata