

□ In caso di esito sufficiente della prova scritta, chiedo di sostenere la prova orale facoltativa.

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte ≥ 12 . Il tempo a disposizione è 2 ore.

PRIMA PARTE

1. Risolvere il seguente limite:

$$\ell = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{4x} + e^{2x} + 3e^x}{\sin(e^x)} + \frac{\cos(x^3) + \arctan(x)}{x^2 + 1} \right).$$

Allora $\ell =$ 3 .

3 pt.

2. Sia $z = 2i + 3$ e $C = \left(\frac{|z+1|}{|\bar{z}-i|} \right)^2$. Allora $C =$ 10/9 .

3 pt.

3. Sia, per $x \in (-1, +\infty)$,

$$f(x) = e^{-1+\cos(x)} + \log(x+1) + \arctan(e^x - 1)$$

e sia g la funzione inversa di f . Allora $g'(1) =$ 1/2 .

3 pt.

4. Sia $f(x) = \frac{\arctan(x)}{x^2+1} + 2x + 4$ e sia t la retta tangente ad f in $(0, f(0))$.

Allora $t(1) =$ 7 .

3 pt.

5. Sia

$$\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log(1+n^{-4})}{\cos(n^{-2})-1} + \frac{\log(n) + e^n + \sin(n) + n^4}{e^{2n} + n^4} \right).$$

Allora $\ell =$ -2 .

3 pt.

6. Sia dato l'integrale definito

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} (x \cos x + 2e^x \cos x) dx.$$

Allora $I =$ $e^{-\pi} - e^{\pi}$.

3 pt.

SECONDA PARTE

7. Sia $f(x) = 2e^{-x^2} - 1$. Quali delle seguenti proprietà ha f ? A) continua nel suo dominio, B) derivabile nel suo dominio, C) monotona crescente, D) limitata superiormente, E) assume minimo relativo in $x = -1$, F) è convessa nel suo dominio, G) assume massimo assoluto nel punto $x = 0$, H) ha un asintoto orizzontale

La risposta è: ABDGH

4 pt.

8. Enunciare il Criterio del rapporto per successioni.

Soluzione:

3 pt.

9. Stabilire per quali $\alpha \in (1, +\infty)$ converge l'integrale improprio $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^\alpha + x + 3} dx$. Una sola delle seguenti risposte è corretta.

5 pt.

- (a) L'integrale converge per ogni α
- (b) L'integrale converge se e solo se $\alpha < 3$
- (c) L'integrale converge se e solo se $\alpha < 4$
- (d) L'integrale converge se e solo se $\alpha \geq 3$
- (e) L'integrale converge se e solo se $\alpha > 4$