

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte ≥ 12 . Il tempo a disposizione è 2 ore.

PRIMA PARTE

1. Sia

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\log(1+x^2)}{x(\sqrt{1+2x}-1)} + \frac{|x|^2 - x^4}{x|x| + x^3} + \frac{x^2 \log(|x|)}{x} \right).$$

Allora $\ell =$ _____ 2 _____ .

3 pt.

2. Sia $z = 2 + 3i$ e $C = z - \bar{z} + \operatorname{Re} \left(\frac{14}{z\bar{z}+1} + i \frac{\bar{z}+z}{|z|^2-1} \right)$. Allora $C =$ _____ $6i + 1$ _____ .

3 pt.

3. Sia I l'integrale definito

$$I = \int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2} dx.$$

Allora $10I =$ _____ $4 - \log 5$ _____ .

3 pt.

4. Sia $f(x) = \frac{x^2 \log(x) - 1}{x}$ e sia t la retta tangente ad f in $(1, f(1))$.

Allora $t(2) =$ _____ 1 _____ .

3 pt.

5. Sia, per $x \in (0, e)$,

$$f(x) = \frac{x^2}{\log|x|-1}$$

e sia g la funzione inversa di f . Allora $g'(-1) =$ _____ $-1/3$ _____ .

3 pt.

6. Sia

$$\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n^4 \sqrt{1 - \cos(1/n^4)} + e^{n^{-1/3}} - 1 + \frac{\sin(n)}{n^2} \right).$$

Allora $\ell =$ _____ $\sqrt{2}$ _____ .

3 pt.

SECONDA PARTE

7. Sia $f(x) = ((x - 1)(x - 2)^2)^{1/3}$. Quali delle seguenti proprietà ha f ? A) derivabile nel suo dominio, B) continua nel suo dominio, C) sup. limitata, D) ha un punto di minimo relativo, E) monotona nel suo dominio, F) inf. limitata, G) ha asintoto orizzontale, H) ha una cuspid.

La risposta è: BDH

4 pt.

8. Enunciare il Teorema di Fermat.

Soluzione:

4 pt.

9. Dato l'integrale improprio $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2 + x + 1} dx$, stabilire quale (una sola) delle seguenti risposte è corretta:

- (a) L'integrale diverge a $+\infty$
- (b) L'integrale converge
- (c) L'integrale diverge a $-\infty$
- (d) L'integrale oscilla

4 pt.