

□ In caso di esito sufficiente della prova scritta, chiedo di sostenere la prova orale facoltativa.

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte è ≥ 12 . Il tempo a disposizione è 3 ore.

PRIMA PARTE

1. Trovare l'area della regione di piano complesso $A = \{z \in \mathbf{C} : |Re(z)| + |Im(z)| \leq 5\}$.

$A = \underline{\hspace{2cm} 50 \hspace{2cm}}$.

2 pt.

2. Sia

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x e^{1/x} + \frac{4x \sin(3x)}{3 \sin^2(2x)} + \frac{6e^{-x^2/2} - 6 \cos(x)}{x^4} \right).$$

Allora $\frac{2\ell}{3} = \underline{\hspace{2cm} 1 \hspace{2cm}}$.

2 pt.

3. Sia $f(x) = \frac{1}{x+1} - \arctan(x) + e^{-x} + 1$. Sia t la retta tangente ad f in $(0, f(0))$. Allora $t(1) = \underline{\hspace{2cm} 0 \hspace{2cm}}$.

2 pt.

4. Sia dato l'integrale definito

$$I = \int_0^{\sqrt{5}} \left((4+x^2)^{1/2} x + 2|x-\sqrt{5}| - \sqrt{5} \right) dx.$$

Allora $3I = \underline{\hspace{2cm} 19 \hspace{2cm}}$.

2 pt.

5. Sia per $x > 0$

$$f(x) = \log \left(\frac{x+3}{x^2+1} \right)$$

e sia g la funzione inversa di f . Allora $\frac{25}{g'(0)} = \underline{\hspace{2cm} -15 \hspace{2cm}}$.

2 pt.

6. Determina per quali valori di α la serie

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n \arctan(n) \cos(n^\alpha) \sin(n^{-3})}$$

converge. $\underline{\hspace{2cm} \alpha < -3 \hspace{2cm}}$.

2 pt.

7. Determina per quali valori iniziali $y_0 \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (5-y)^2 \ln(y^2+1)(t+1)^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

ha una soluzione costante. $\underline{\hspace{2cm} 0 \text{ e } 5 \hspace{2cm}}$.

2 pt.

Nota per gli studenti: la risposta all'esercizio è un elenco di numeri reali.

8. Considera la funzione $f(x, y) = \sin(\pi x) \cos(2\pi y)$ e il triangolo $K \subset \mathbb{R}^2$ i cui vertici sono $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(0, 1)$. Sia M il valore massimo assunto da f su K e sia m il valore minimo assunto da f su K . Allora $M - m =$ 2 . 2 pt.
9. Considera la curva C parametrizzata dalla funzione $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t^3, |1 - t^2|)$. Siano $t_1, t_2 \in I$ i punti in cui f non è regolare. Allora $t_1 + t_2 =$ 1 . 2 pt.
10. Sia $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definito da $U(x, y, z) = xyz$ e sia S la superficie parametrizzata dalla funzione $r : [-1, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = (u, u - v, v)$. Sia A il flusso del campo $F(x, y, z) = \nabla U(x, y, z)$ uscente da S con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione r . Allora $3A =$ -8 . 2 pt.

SECONDA PARTE

11. Sia $f(x) = \sin(\arctan(x))$, $x \in \mathbf{R}$. Quali delle seguenti proprietà ha f ? A) continua, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona, F) convessa, G) concava, H) ha minimo assoluto, I) periodica.
La risposta è: ABCDE 3 pt.

12. Mettiamo un teorema della seconda parte del corso???

Soluzione:

3 pt.

13. Dato il parametro reale α e l'integrale improprio $I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{\alpha x}}{x^4 + 1} + xe^{\alpha x} \right) dx$, stabilire quale (una sola) delle seguenti risposte è corretta:

- (a) Per ogni α l'integrale diverge a $+\infty$
 (b) L'integrale converge solo per $\alpha < 0$
 (c) L'integrale converge solo per $\alpha \leq 0$
 (d) L'integrale converge solo per $\alpha > 0$
 (e) L'integrale converge solo per $\alpha \geq 0$

4 pt.

14. Considera la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 2y^2 = 1 \text{ e } 0 \leq z \leq 2 - x - y\}$.

1. Sia n il numero di punti singolari di S . Allora $n =$ 0 .
2. Determina se il bordo di S è $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 2y^2 = 1\}$ no .
3. Determina se il bordo di S è $\{(x, y, 2 - x - y) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 2y^2 = 1\}$ no .
4. Sia N il versore normale uscente da S nel punto $(1/2, -1/2, 3/2)$. $N =$ $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$.

4 pt.