Ingegneria Edile-Architettura
8/7/2020

Analisi Matematica 1

Cognome: ______________

Nome: ______________

Appello online. Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18. Il tempo a disposizione è 2 ore.

1. Siano z_k, $k = 0, 1, 2, 3$ le radici complesse dell'equazione: $z^3 - |z| = 0$. Siano z_2 e z_3 le radici non reali. Allora si ha $|z_2| + |z_3 - \bar{z}_2| + \frac{1}{Re(z_2)} + Im|z_3| =$ ____-1____ . **3 pt.**

Sol.:

$$z^3 - |z| = 0 \iff \rho^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) = \rho \iff \rho^3 = \rho, 3\theta = 2k\pi,\ k \in Z.$$

Quindi

$$z_0 = 0,\ z_1 = 1,\ z_2 = -1/2 + i\sqrt{3}/2,\ z_3 = -1/2 - i\sqrt{3}/2 = \bar{z}_2$$

Quindi

$$|z_2| = 1, , z_3 - \bar{z}_2 = 0,\ Re(z_2) = -1/2,\ Im(|z_3|) = 0$$

2. Sia **3 pt.**

$$l = \lim_{x \to 0} \left(\frac{8x - 8\log(1+x)}{\sin^2(2x)\cos(x)} + \frac{x^2}{\cos(x^2)} \right).$$

Allora $l =$ ____1____ .

Sol.: Usando Taylor, si ha

$$l = \lim_{x \to 0} \left(\frac{4x^2 + o(x^2)}{(4x^2 + o(x^2))1} + \frac{0}{1} \right) = 1.$$

3. Data, per $x > -1$, **3 pt.**

$$f(x) = e^{-x}(\cos(x) + \sin(x)) + \log(3x + 3)$$

e sia t la retta tangente ad f nel punto $(0, f(0))$. Allora $t(-\log(3)) =$ ____1____ .

Sol.:

$$f(0) = 1 + \log(3), \quad f'(x) = -2e^{-x}\sin(x) + \frac{3}{3x+3},$$

$$f'(0) = 0 + 1 = 1,\ t(x) = 1(x - 0) + 1 + \log(3),\ t(-\log(3)) = 1$$

4. Sia dato l'integrale definito **3 pt.**

$$I = \int_{-\pi/16}^{\pi/16} \frac{16|x|}{\pi} - \cos^2(4x) + x\cos(x)\, dx.$$

Allora $8I =$ ____-1____ .

Sol.: Per simmetria si ha,

$$I = \frac{16}{\pi}(\frac{\pi}{16})^2 - 2\int_0^{\pi/16} \frac{1 + \cos(8x)}{2} + 0\, dx = +\frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$$

5. Sia

$$\ell := \lim_{n\to+\infty}\left(\sin(n)\left(\log(n^3-1)-\log(n^3+1)\right)+\frac{n^n}{4^n n!}+\frac{3n^3+\log(n)+4^n}{2^{2n}+\log^7(n)+1}\right).$$

3 pt.

Allora $\ell =$ 1 .

Sol.: $\ell = \lim_{n\to+\infty}\left(\sin(n)\log(\frac{n^3-1}{n^3+1})+\frac{n^n}{4^n n!}+\frac{4^n}{2^{2n}}\right) = \lim_{n\to+\infty}(0+0+1)$, dove abbiamo usato il criterio del rapporto per il secondo addendo perché $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{n+1}n!4^n}{4^{n+1}(n+1)n!} = \frac{e}{4} < 1$.

6. Sia per $x > -2$

$$f(x) = x + 2e^x + x^3 + e^{2x}$$

3 pt.

e sia g la funzione inversa di f. Allora $10g'(3) =$ 2 .
Sol.:

$$f(0) = 3, \quad f'(x) = 1 + 2e^x + 3x^2 + 2e^{2x}, \quad f'(0) = 5$$

7. Sia $f(x) = 2 + \sqrt{-3x+1}$. Quali delle seguenti proprietà ha f? A) Il dominio di f è tutto R, B) Il dominio di f è $Dom(f) = (-\infty, 1/3]$, C) Il dominio di f è $Dom(f) = [1/3, +\infty)$, D) inf. limitata, E) monotona crescente , F) monotona decrescente , G) concava, H) convessa, I) assume minimo assoluto in $x = 1/3$.

3 pt.

La risposta è: **BDFGI**

Sol.: Per disegnare f posso partire dalla funzione $g(x) = \sqrt{x}$, comprimo in orizzontale di 3 e faccio la simmetrica rispetto all'asse y. Poi traslo a destra di 1/3 e in verticale di 2. Il Dominio è dato dalla disequazione $-3x + 1 \geq 0$, quindi $x \leq 1/3$.

8. Cosa dice il Teorema di Fermat? (La risposta corretta è una sola).

4 pt.

A) Se $f : [a, b] \to R$ è una funzione derivabile in (a, b) e se $\bar{x}$ è un punto di estremo locale per f in (a, b), allora $f'(\bar{x}) = 0$.

B) Se $f : [a, b] \to R$ è una funzione derivabile in (a, b) e se $\bar{x}$ è un punto di minimo locale per f in (a, b), allora $f'(\bar{x}) = \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}$.

C) Se $f : [a, b] \to R$ è una funzione derivabile in (a, b) e se $\bar{x} \in (a, b)$ è tale che $f'(\bar{x}) = 0$, allora $\bar{x}$ è un punto di estremo locale per f in (a, b).

La risposta è: **A**

9. Dato l'integrale improprio $I = \int_1^{+\infty}\frac{(x+4)}{x(x+2)x^\alpha}dx$, stabilire quale (una sola) delle seguenti risposte è corretta:

5 pt.

(a) L'integrale diverge per ogni α

(b) L'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$

(c) L'integrale converge se e solo se $\alpha < 0$

(d) ✓ L'integrale converge se e solo se $\alpha > 0$

(e) L'integrale converge se e solo se $\alpha \geq 0$