Ingegneria Civile-Ambientale
8/7/2020

Analisi Matematica

Cognome: ____________________
Nome: ____________________

Appello online. Il tempo a disposizione è 2 ore.

1. Siano z_k, $k = 0, 1, 2, 3$ le radici complesse dell'equazione:
$z^3 - |z| = 0$. Siano z_2 e z_3 le radici non reali. Allora si ha $|z_2| + |z_3 - \bar{z}_2| + \frac{1}{Re(z_2)} + Im|z_3| =$ ___ -1 ___ .

3 pt.

Sol.:

$$z^3 - |z| = 0 \iff \rho^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) = \rho \iff \rho^3 = \rho, 3\theta = 2k\pi,\ k \in Z.$$

Quindi

$$z_0 = 0,\ z_1 = 1,\ z_2 = -1/2 + i\sqrt{3}/2,\ z_3 = -1/2 - i\sqrt{3}/2 = \bar{z}_2$$

Quindi

$$|z_2| = 1, , z_3 - \bar{z}_2 = 0,\ Re(z_2) = -1/2,\ Im(|z_3|) = 0$$

2. Sia

$$l = \lim_{x\to 0}\left(\frac{8x - 8\log(1+x)}{\sin^2(2x)\cos(x)} + \frac{x^2}{\cos(x^2)}\right).$$

3 pt.

Allora $l =$ ___ 1 ___ .

Sol.: Usando Taylor, si ha

$$l = \lim_{x\to 0}\left(\frac{4x^2 + o(x^2)}{(4x^2 + o(x^2))1} + \frac{0}{1}\right) = 1.$$

3. Sia dato l'integrale definito

$$I = \int_{-\pi/16}^{\pi/16} \frac{16|x|}{\pi} - \cos^2(4x) + x\cos(x)\,dx.$$

3 pt.

Allora $8I =$ ___ -1 ___ .

Sol.: Per simmetria si ha,

$$I = \frac{16}{\pi}(\frac{\pi}{16})^2 - 2\int_0^{\pi/16} \frac{1+\cos(8x)}{2} + 0\,dx = +\frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$$

4. Data, per $x > -1$,

$$f(x) = e^{-x}(\cos(x) + \sin(x)) + \log(3x+3)$$

3 pt.

e sia t la retta tangente ad f nel punto $(0, f(0))$. Allora $t(-\log(3)) =$ ___ 1 ___ .
Sol.:

$$f(0) = 1 + \log(3), \quad f'(x) = -2e^{-x}\sin(x) + \frac{3}{3x+3},$$

$$f'(0) = 0 + 1 = 1,\ t(x) = 1(x-0) + 1 + \log(3),\ t(-\log(3)) = 1$$

5. La soluzione del problema di Cauchy 3 pt.
$$\begin{cases} 4y' = y^{-3} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$
definita sull'insieme $[a, +\infty)$, con $a \in \mathbb{Z}$. Allora $a =$

Soluzione: l'equazione differenziale a variabili separabili. Si riconduce a $4y'y^3 = 1$, che ha come soluzioni $y(t) = \pm\sqrt[4]{x+c}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$. Imponendo che $y(0) = 2$ otteniamo $y(t) = \sqrt[4]{x+16}$. Quindi $a = -16$.

6. Sia $x + by + cz = d$ l'equazione del piano tangente al cono $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$ nel punto di coordinate $(1, 1, \sqrt{2})$, normalizzata in modo che il coefficiente della x sia uguale a 1. Allora $b^2 + c^2 + d^2 =$. 3 pt.

Soluzione: parametrizziamo il cono con la funzione $f : [0, 2]\times[0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$, $f(\rho, \theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), \rho)$. Con questa parametrizzazione, abbiamo $(1, 1, \sqrt{2}) = f(\sqrt{2}, \pi/4)$. Inoltre
$\frac{\partial f}{\partial \rho}\times\frac{\partial f}{\partial \theta} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 1)\times(-\rho\sin(\theta), \rho\cos(\theta), 0) = (-\rho\cos(\theta), -\rho\sin(\theta), \rho)$. Quindi $N(\sqrt{2}, \pi/4) = (-1, -1, \sqrt{2})$. Il piano tangente al cono in $(1, 1, \sqrt{2})$ ha equazione
$(x - 1, y - 1, z - \sqrt{2}) \cdot (-1, -1, \sqrt{2}) = 0 \rightsquigarrow 1 - x + 1 - y + \sqrt{2}z - 2 = 0 \rightsquigarrow x + y - \sqrt{2}z = 0$.
Osserviamo che l'ultima equazione normalizzata in modo che il coefficiente della x sia uguale a 1. Quindi $b = 1, c = -\sqrt{2}, d = 0$ e $b^2 + c^2 + d^2 = 3$.

7. Sia A l'area della figura piana Ω delimitata dalla curva C parametrizzata da $f(t) = (\cos(t), t\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Calcola $\frac{A}{\pi^2}$. 3 pt.

Soluzione: l'area si calcola agevolmente con il teorema di Green. Abbiamo, per esempio,
$A = \oint_{C^+}(0, x)\ ds = \oint_{C^+}(-y, 0)\ ds = \frac{1}{2}\oint_{C^+}(-y, x)\ ds = \dots$.
Calcoliamo l'area usando l'uguaglianza $A = \frac{1}{2}\oint_{C^+}(-y, x)\ ds$. Quindi
$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(-t\sin(t), \cos(t))\cdot(-\sin(t), \sin(t)+t\cos(t))dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} t\sin^2(t)+t\cos^2(t)+\sin(t)\cos(t)\ dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi^2$.
Quindi $\frac{A}{\pi^2} = 1$.

8. Sia $f(x) = 2 + \sqrt{-3x + 1}$. Quali delle seguenti proprietà ha f? A) Il dominio di f è tutto R, B) Il dominio di f è $Dom(f) = (-\infty, 1/3]$, C) Il dominio di f è $Dom(f) = [1/3, +\infty)$, D) inf. limitata, E) monotona crescente , F) monotona decrescente , G) concava, H) convessa, I) assume minimo assoluto in $x = 1/3$. 3 pt.
La risposta è: **BDFGI**

Sol.: Per disegnare f posso partire dalla funzione $g(x) = \sqrt{x}$, comprimo in orizzontale di 3 e faccio la simmetrica rispetto all'asse y. Poi traslo a destra di $1/3$ e in verticale di 2. Il Dominio è dato dalla disequazione $-3x + 1 \geq 0$, quindi $x \leq 1/3$.

9. Indica quale delle seguenti affermazioni una conseguenza del teorema di Stokes. 3 pt.

1. se $D \subseteq \mathbb{R}^2$ x-semplice e y-semplice, allora per ogni campo $F = (F_1, F_2)$ di classe C^1 si ha $\iint_D \nabla \cdot F dxdy = \oint_{\partial^+ D}(-F_2, F_1)ds$
2. il flusso della divergenza di un campo C^1 attraverso ogni superficie regolare con bordo vuoto nullo.
3. il flusso del rotore di un campo C^1 attraverso ogni superficie regolare con bordo vuoto nullo.

Soluzione:

1. questo il teorema di Green;
2. quest'affermazione falsa;
3. questa una conseguenza del teorema di Stokes: $\iint_\Sigma \nabla \times F dS = \oint_{\partial^+\Sigma} F ds$, quindi se $\partial\Sigma = \emptyset$, l'integrale al secondo membro nullo.

10. Considera l'insieme $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq |x| + |y| \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ e la funzione $f : K \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = 3x^2 + x - 2y^3$. Sia M il valore massimo assunto da f su K e m il valore minimo assunto da f su K. Allora $M + 3m =$

3 pt.

Soluzione: applichiamo il teorema di Fermat sull'interno di K. Cerchiamo i punti critici di f nell'interno di K.
$\nabla f = (6x + 1, -6y^2)$, quindi $\nabla f = (0, 0)$ se e solo se $(x, y) = (-1/6, 0)$. Osserviamo che $(x, y) = (-1/6, 0)$ non appartiene all'interno di K.

Ora studiamo il comportamento di f sul bordo di K. Il bordo di K composto da tre pezzi:

1. il segmento parametrizzato da $s_y(t) = (0, t)$, $t \in [0, 1]$;
2. il segmento parametrizzato da $s_x(t) = (t, 0)$, $t \in [0, 1]$;
3. il segmento parametrizzato da $s_+(t) = (t, 1 - t)$, $t \in [0, 1]$.

Studiamo il comportamento di f lungo ciascun pezzo del bordo.

1. $f(s_y(t)) = -2t^3$, che assume massimo in $t = 0$ e minimo in $t = 1$. Calcoliamo i due valori: $f(s_y(0)) = 0$, $f(s_y(1)) = -2$.
2. $f(s_x(t)) = 3t^2 + t$, che assume massimo in $t = 1$ e minimo in $t = 0$. Calcoliamo i due valori: $f(s_x(1)) = 4$ e $f(s_x(0)) = 0$.
3. $f(s_+(t)) = 3t^2 + t - 2(1 - t)^3$, $t \in [0, 1]$. Siccome $\frac{d}{dt} f(s_+(t)) = 6t^2 - 6t + 7 > 0$ per ogni $t \in [0, 1]$, la funzione strettamente crescente su $[0, 1]$, assume minimo per $t = 0$ e massimo per $t = 1$. Abbiamo gi esaminato entrambi i punti ai passi precedenti.

Di conseguenza $M = 4$, $m = -2$ e $M + 3m = -2$.