

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte ≥ 12 . Il tempo a disposizione è 2 ore.

PRIMA PARTE

1. Sia $z = 2i + 3$ e $C = \operatorname{Im} \left(\frac{z}{z-i} + |z| + \operatorname{Im}z + z\bar{z} \right)$. Allora $10C =$ 3 .

3 pt.

2. Sia

$$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x^2 \left(\cos \left(\frac{1}{x} \right) - 1 \right) + \frac{2e^{2x} + 2 + \log(x)}{x^3 + x^2 - e^{2x}} \right).$$

3 pt.

Allora $l =$ -3 .

3. Sia $f(x) = xe^{\frac{1-x}{x}}$ e sia t la retta tangente ad f in $(1, f(1))$.

Allora $t(-3) =$ 1 .

3 pt.

4. Sia dato l'integrale definito

$$I = \int_0^{4/9} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx.$$

3 pt.

Allora $12I =$ π .

5. Sia

$$\ell := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^2 \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{\sin(n)}{n} \right).$$

3 pt.

Allora $\ell =$ $+\infty$.

6. Sia

$$f(x) = e^{-x} - e^{-3x}, \quad x > 1,$$

3 pt.

e sia g la funzione inversa di f . Dopo aver verificato che $f(\log 3) = 8/27$, calcolare $g'(8/27) =$ $-27/6$.

SECONDA PARTE

7. Sia $f(x) = \frac{x^2}{\log(|x|) - 1}$. Quali delle seguenti proprietà ha f ? A) $\text{dom}(f) \equiv \mathbf{R} \setminus \{e\}$, B) derivabile nel suo dominio, C) inf. limitata, D) monotona, E) pari, F) concava, G) ha due asintoti verticali, H) assume minimo relativo in $x = 0$.

La risposta è: **BEG**

4 pt.

8. Enunciare il Teorema di Fermat.

3 pt.

9. Dato $a \in \mathbf{R}$ e l'integrale improprio $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(4+9x)} dx$, stabilire quale (una sola) delle seguenti risposte è corretta:

- (a) L'integrale diverge a $+\infty$ per ogni valore di a .
- (b) L'integrale converge se e solo se $a < 1$.
- (c) L'integrale converge se e solo se $a > 0$.
- (d) L'integrale converge se e solo se $a \in (0, 1)$.
- (e) L'integrale converge se e solo se $a > -4/9$.

5 pt.