

□ In caso di esito sufficiente della prova scritta, chiedo di sostenere la prova orale facoltativa.

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte ≥ 12 . Il tempo a disposizione è 2 ore.

PRIMA PARTE

1. Sia $f(x) = \frac{\sin x}{(\cos x + 2)^2}$ e sia t la retta tangente ad f in $(\pi/2, f(\pi/2))$.

Allora $t(9\pi/2) = \frac{\pi + 1/4}{\pi + 1/4}$.

3 pt.

2. Sia dato l'integrale definito

$$I = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^3 - x) \arctan x \, dx.$$

Allora $I = \sqrt{3}$.

3 pt.

3. Sia

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin(x) + x^2 - 2x^4}{x^2(x - x^2)} + 8^{-6x} \right).$$

Allora $\ell = 2$.

3 pt.

4. Sia

$$\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e^{\sin(\frac{1}{n^2})} - 2 \cos(\frac{1}{n^n})}{\log(1 + \frac{1}{n^2}) + 2^n \left((1 + \frac{1}{3^n})^{1/3} - 1 \right)}.$$

Allora $\ell = 2$.

3 pt.

5. Sia $z = -1 - i$, $w = \bar{z}$ e $C = \operatorname{Im}\left(\frac{w}{z^4}\right)$. Allora $C = -1/4$.

3 pt.

6. Sia, per $x \in (0, \pi)$,

$$f(x) = \frac{2 \cos x - 1}{\cos x + 2}$$

e sia g la funzione inversa di f . Allora $g'(-1/2) = -4/5$.

3 pt.

SECONDA PARTE

7. Sia $f(x) = \frac{e^{|x|}}{\sqrt{|x|-1}}$. Quali delle seguenti proprietà ha f ? A) continua nel suo dominio, B) limitata superiormente, C) pari, D) ha due asintoti verticali, E) monotona crescente, F) ha massimo assoluto in $x = 3/2$, G) ha due asintoti obliqui, H) ha minimo assoluto in $x = -3/2$.

La risposta è: ACDH

4 pt.

8. Enunciare il teorema del valor medio di Lagrange.

Soluzione:

3 pt.

9. Stabilire per quali $\alpha > 0$ converge l'integrale improprio $I = \int_0^1 \frac{x - \log(x+1)}{\sin(x^\alpha)} dx$. Una sola delle seguenti risposte è corretta.

5 pt.

- (a) L'integrale converge se e solo se $\alpha < 3$
- (b) L'integrale converge se e solo se $\alpha < 1$
- (c) L'integrale diverge per ogni α
- (d) L'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$
- (e) L'integrale converge se e solo se $\alpha < 2$