Ingegneria Edile-Architettura 18/6/2020

Analisi Matematica 1

Cognome: __________

Nome: __________

Appello online. Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18. Il tempo a disposizione è 2 ore.

1. Siano z_k, $k = 0,1,2,3,4,5$ le radici complesse dell'equazione: $(z+2i)^5 = (\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^6$. Allora, per $k = 0,1,2,3,4,5$, si ha $|z_k + 2i|^{5/3} =$ 4 . — 3 pt.

Sol.:

$$(\sqrt{2}+i)^6 = (2(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)))^6 = -2^6 i \quad \text{quindi } |z_k+2i|^{5/3} = 2^{6/3} = 4.$$

2. Sia — 3 pt.

$$l = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x\sin(4x)}{\sin^2(2x)\cos(x)} + \frac{\sin^3(x)}{x^2} + \frac{4\log(x+1) + 4e^x + 2}{x - x^2 - 2e^x} \right).$$

Allora $l =$ -2 .

Sol.:

$$l = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x4x}{4x^2} + \frac{x^3}{x^2} + \frac{4+2}{-2} \right) = 1 + 0 - 3.$$

3. Sia $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \cos(4x^2) + \pi x$ e sia t la retta tangente ad f in $(0, f(0))$. Allora $t(2)/\pi =$ 2 . — 3 pt.

Sol.: $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - 8x\sin(4x^2) + \pi$, $f'(0) = -1+\pi$, $f(0) = 2$. Quindi $t(2) = (-1+\pi)(2-0) + 2 = 2\pi$, da cui $t(2)/\pi = 2$.

4. Sia dato l'integrale definito — 3 pt.

$$I = \int_{-6}^{0} \frac{2}{(x+3)^5} + \cos^2(4\pi x)\, dx.$$

Allora $2I =$ 6 .

Sol.:

$$I = 0 + \int_{-6}^{0} \frac{1+\cos(8\pi x)}{2}\, dx = 3 + 1/2\sin(8\pi 0) - 1/2\sin(8\pi(-6)) = 3$$

5. Sia — 3 pt.

$$\ell := \lim_{n\to\infty} \left(n \left(\frac{e^{1/n^2} + 2\cos(1/n) - 3}{\sin(1/n^3)} \right) + \frac{\sin n}{\log(n)} \right).$$

Allora $12\ell =$ 7 .

Sol.: $\ell = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n\left(e^{1/n^2} - 1 + 2\cos(1/n) - 1\right)}{1/n^3} + 0 \right)$. Da cui usando Taylor, $\ell = \lim_{n\to+\infty} n^4 \left(\frac{1}{12n^4} + \frac{1}{2n^4} \right)$.

6. Sia per $x > -2$

$$f(x) = \frac{2}{x+2} + 3\arctan(3x) + e^{-x^2}$$

e sia g la funzione inversa di f. Allora $17g'(2) =$ ___2___ .

3 pt.

Sol.:

$$f(0) = 2, \quad f'(x) = -2(x+2)^{-2} + 3\frac{3}{1+9x^2} - 2xe^{-x^2}, \quad f'(0) = -1/2 + 9 = 17/2$$

7. Sia $f(x) = |e^{-x^2+2x} - 1|$, $x \in [0, +\infty)$. Quali delle seguenti proprietà ha f? A) continua, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona, F) ha un asintoto orizzontale, G) concava, H) convessa, I) assume minimo assoluto in $x = 0$.

3 pt.

La risposta è: **ACDFI**

Sol.: f è continua perché composta di funzioni continue. Non è derivabile nel punto $x = 2$ (ha un punto angoloso. $f'(x) = (-2x+2)e^{-x^2+2x}$, quindi f assume massimo in $x = 1$ e $f(1) = e - 1$, per cui f è limitata dall'alto da $e - 1$ e dal basso da 0. Non è monotona: cresce tra 0 e 1 e tra 2 e $+\infty$, decresce tra 1 e 2. Ha un asintoto orizzontale in $y = 1$ perché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Non è concava e nè convessa. Ha un flesso in $x = 1 + \sqrt{2}/2$. Assume minimo assoluto in $x = 0$ e $x = 2$ dove vale 0.

8. Cosa dice il criterio del confronto per gli integrali impropri? (La risposta corretta è una sola).

4 pt.

A) Se f e g sono due funzioni continue su $[1, +\infty)$ e $0 \le f \le g$ su $[1, +\infty)$, allora se g è integrabile in senso improrio su $[1, +\infty)$ anche f lo è.

B) Se f e g sono due funzioni continue su $[1, +\infty)$ e $0 \le f \le g$ su $[1, +\infty)$, allora se f è integrabile in senso improrio su $[1, +\infty)$ anche g lo è.

C) Se f e g sono due funzioni continue su $[1, +\infty)$ e $0 \le g \le f$ su $[1, +\infty)$, allora se g è integrabile in senso improrio su $[1, +\infty)$ anche f lo è.

La risposta è: **A**

9. Dato l'integrale improprio $I = 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+2)}dx$, stabilire quale (una sola) delle seguenti risposte è corretta:

5 pt.

(a) L'integrale diverge a $+\infty$

(b) L'integrale diverge a $-\infty$

(c) L'integrale converge e $I = 3$

(✔) L'integrale converge e $I = \log(3)$

(e) L'integrale vale 0.