

□ In caso di esito sufficiente della prova scritta, chiedo di sostenere la prova orale facoltativa.

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte ≥ 12 . Il tempo a disposizione è 2 ore.

PRIMA PARTE

1. Siano z_k ($k = 0, 1, 2, 3$) le radici dell'equazione $(z + 2 - 2i)^4 + 16 = 0$. Sia A l'area del poligono i cui vertici sono gli z_k . Allora $A =$ _____ 8 _____ .

3 pt.

2. Sia

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{x}{3+x} \right)^x + \frac{2^{-x} + 3x^3}{\log^6(x) + 2 - x^5} \right).$$

3 pt.

Allora $\frac{1}{\ell} =$ _____ e^3 _____ .

3. Sia $f(x) = xe^{-x^2}$. Sia x_M il punto di massimo assoluto di f sull'intervallo $[0, 2]$. Sia t la retta tangente ad f in $(x_M, f(x_M))$.

3 pt.

Allora $\frac{1}{t(1)} =$ _____ $\sqrt{2e}$ _____ .

4. Sia dato l'integrale definito

$$I = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^3 (\cos x)^2 dx.$$

3 pt.

Allora $15I =$ _____ 2 _____ .

5. Sia per $x \in \mathbf{R}$

$$f(x) = \cos(\arctan x)$$

3 pt.

e sia g la funzione inversa di f . Allora $\sqrt{2}g'(-\frac{\sqrt{2}}{2}) =$ _____ -4 _____ .

6. Sia

$$l := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(\frac{3}{n}) - 3e^{\frac{1}{n}} + 3}{\frac{1}{n^2}} \right).$$

3 pt.

Allora $2l =$ _____ -3 _____ .

SECONDA PARTE

7. Sia $f(x) = e^{-x^2}x + 4$, $x \in [0, +\infty)$. Quali delle seguenti proprietà ha f ? A) continua, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona, F) convessa, G) concava, H) ha minimo assoluto, I) periodica.

4 pt.

La risposta è: _____ **ABCDH** _____

8. Enunciare il teorema di Fermat.

Soluzione:

3 pt.

9. Dato il parametro reale α e l'integrale improprio $I = \int_0^{+\infty} x e^{\alpha x} dx$, stabilire quale (una sola) delle seguenti risposte è corretta:

5 pt.

- (a) Per ogni α l'integrale diverge a $+\infty$
- (b) L'integrale converge solo per $\alpha \geq 0$
- (c) L'integrale converge solo per $\alpha < 0$
- (d) L'integrale converge solo per $\alpha > 0$
- (e) L'integrale converge solo per $\alpha > 1$