Ingegneria Civile-Ambientale
18/6/2020

Analisi Matematica

Cognome: ____________________

Nome: ____________________

Appello online. Il tempo a disposizione è 2 ore.

1. Siano z_k, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ le radici complesse dell'equazione: $(z + 2i)^5 = (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^6$. Allora, per $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, si ha $|z_k + 2i|^{5/3} =$ ____4____ .

3 pt.

Sol.:

$$(\sqrt{2} + i)^6 = (2(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)))^6 = -2^6 i \quad \text{quindi } |z_k + 2i|^{5/3} = 2^{6/3} = 4.$$

2. Sia

$$l = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x\sin(4x)}{\sin^2(2x)\cos(x)} + \frac{\sin^3(x)}{x^2} + \frac{4\log(x+1) + 4e^x + 2}{x - x^2 - 2e^x} \right).$$

3 pt.

Allora $l =$ ____-2____ .

Sol.:

$$l = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x4x}{4x^2} + \frac{x^3}{x^2} + \frac{4+2}{-2} \right) = 1 + 0 - 3.$$

3. Sia dato l'integrale definito

$$I = \int_{-6}^{0} \frac{2}{(x+3)^5} + \cos^2(4\pi x)\, dx.$$

3 pt.

Allora $2I =$ ____6____ .

Sol.:

$$I = 0 + \int_{-6}^{0} \frac{1 + \cos(8\pi x)}{2}\, dx = 3 + 1/2\sin(8\pi 0) - 1/2\sin(8\pi(-6)) = 3$$

4. Sia per $x > -2$

$$f(x) = \frac{2}{x+2} + 3\arctan(3x) + e^{-x^2}$$

3 pt.

e sia g la funzione inversa di f. Allora $17g'(2) =$ ____2____ .
Sol.:

$$f(0) = 2, \quad f'(x) = -2(x+2)^{-2} + 3\frac{3}{1+9x^2} - 2xe^{-x^2}, \quad f'(0) = -1/2 + 9 = 17/2$$

5. Sia $y(t) = a_0e^{-t} + a_1\cos(t) + a_2\sin(t) + a_3 + a_4t + a_5t^2$ la soluzione del problema ai limiti

3 pt.

$$\begin{cases} y' + y'' = t \\ y(0) = y(2) = 1. \end{cases}$$

Allora $2(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) =$.
Sol: una generica soluzione dell'equazione differenziale $y' + y'' = t$ ha la forma $y(t) = a_0e^{-t} + a_3 - t + \frac{1}{2}t^2$. Il vincolo $y(0) = 1$ implica $a_0 + a_3 = 1$, il vincolo $y(2) = 1$ implica $(1 - a_3)e^{-2} + a_3 = 1$. Dalla seconda equazione otteniamo $a_3 = 1$ e dalla prima $a_0 = 0$. Quindi la soluzione del problema ai limiti $y(t) = 1 - t + \frac{1}{2}t^2$. Il numero richiesto $0 + 0 + 0 + 2 - 2 + 1 = 1$.

6. Considera la funzione $f(x,y) = x - y^2$ e il triangolo $K \subset \mathbb{R}^2$ i cui vertici sono $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,0)$. Sia M il valore massimo assunto da f su K e sia m il valore minimo assunto da f su K. Calcola $M-m$.

3 pt.

Sol: la funzione non ha punti critici. Sul lato orizzontale $[0,1] \times \{0\}$, $f(x,y) = x$, che assume minimo assoluto per $x = 0$ e massimo assoluto per $x = 1$. Sul lato verticale $\{1\} \times [0,1]$, $f(1,y) = 1 - y^2$, che assume massimo assoluto per $y = 0$ e minimo assoluto per $y = 1$. Sul lato obliquo $\{(x,x) : x \in [0,1]\}$, $f(x,x) = x - x^2$, che assume massimo assoluto per $x = \frac{1}{2}$ e minimo assoluto per $x = 0$ e $x = 1$.

Quindi $M = 1$, $m = 0$, $M - m = 1$.

7. Calcola il lavoro compiuto dal campo $F(x,y,z) = (-z, x^2 + z^2, x)$ lungo la curva parametrizzata da $f : [0,7] \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (\cos(t), t, \sin(t))$.

3 pt.

Sol.: $L = \int_0^7 (-\sin(t), 1, \cos(t)) \cdot (-\sin(t), 1, \cos(t))\, dt = \int_0^7 2\, dt = 14$.

8. Sia $f(x) = |e^{-x^2+2x} - 1|$, $x \in [0,+\infty)$. Quali delle seguenti proprietà ha f? A) continua, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona, F) ha un asintoto orizzontale, G) concava, H) convessa, I) assume minimo assoluto in $x = 0$.

3 pt.

La risposta è: **ACDFI**

Sol.: f è continua perché composta di funzioni continue. Non è derivabile nel punto $x = 2$ (ha un punto angoloso. $f'(x) = (-2x+2)e^{-x^2+2x}$, quindi f assume massimo in $x = 1$ e $f(1) = e - 1$, per cui f è limitata dall'alto da $e - 1$ e dal basso da 0. Non è monotona: cresce tra 0 e 1 e tra 2 e $+\infty$, decresce tra 1 e 2. Ha un asintoto orizzontale in $y = 1$ perché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Non è concava e nè convessa. Ha un flesso in $x = 1 + \sqrt{2}/2$. Assume minimo assoluto in $x = 0$ e $x = 2$ dove vale 0.

9. Cosa dice il criterio del confronto per gli integrali impropri? (La risposta corretta è una sola).

3 pt.

A) Se f e g sono due funzioni continue su $[1,+\infty)$ e $0 \leq f \leq g$ su $[1,+\infty)$, allora se g è integrabile in senso improrio su $[1,+\infty)$ anche f lo è.

B) Se f e g sono due funzioni continue su $[1,+\infty)$ e $0 \leq f \leq g$ su $[1,+\infty)$, allora se f è integrabile in senso improrio su $[1,+\infty)$ anche g lo è.

C) Se f e g sono due funzioni continue su $[1,+\infty)$ e $0 \leq g \leq f$ su $[1,+\infty)$, allora se g è integrabile in senso improrio su $[1,+\infty)$ anche f lo è.

La risposta è: **A**

10. Indica quali delle seguenti formule sono valide per funzioni $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1. (Sono possibili più risposte corrette)

3 pt.

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;
2. $\nabla(fg) = \nabla f \cdot \nabla g$;
3. $\nabla(h(g)) = h'(g)\nabla g$.

Sol.:

1. si;
2. no;
3. si.