Ingegneria Civile-Ambientale
Edile-Architettura
16/6/2021

Analisi Matematica 1

Cognome: ____________________
Nome: ____________________

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18. Il tempo a disposizione è 2 ore.

1. Sia $z = 2i - 3$ e $C = \operatorname{Im}\left(\frac{z+1}{z+3} + \operatorname{Im}(\bar{z}) + z\bar{z} + z - \bar{z}\right)$. Allora $C =$ ____5____ . (3 pt.)

Sol.: $\operatorname{Im}(\operatorname{Im}(\bar{z})) = 0$, $z\bar{z} = |z|^2$ e quindi $\operatorname{Im}(z\bar{z}) = 0$, $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z) = 4i$ e quindi $\operatorname{Im}(z - \bar{z}) = 4$, $\frac{z+1}{z+3} = \frac{2i-2}{2i} = \frac{-2-2i}{-2}$ e quindi $\operatorname{Im}\left(\frac{z+1}{z+3}\right) = 1$.

2. Sia

$$\ell = \lim_{x\to 0^-}\left(xe^{1/x} + \frac{\sin^2(3x)}{3x\sin(3x)} + \frac{2\cos(x^2) - 2}{x^2+2}\right).$$

(3 pt.)

Allora $\ell =$ ____1____ .

Sol.: $\lim_{x\to 0^-} xe^{1/x} = 0$, $\frac{\sin^2(3x)}{3x\sin(3x)} \sim \frac{9x^2}{3x3x}$, quindi $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(3x)}{3x\sin(3x)} = 1$, $\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(x^2)-2}{x^2+2} = \frac{0}{2} = 0$.

3. Sia $f(x) = \dfrac{x^2 + 2\arctan x}{x^3+1} + x + 1$ e sia t la retta tangente ad f in $(0, f(0))$.
Allora $t(2) =$ ____7____ . (3 pt.)

Sol.: $f'(x) = \frac{\left(2x+\frac{2}{x^2+1}\right)(x^3+1)+3x^2(x^2+2\arctan x)}{(x^3+1)^2} + 1$. Da cui $f'(0) = 3$, $f(0) = 1$. Da cui $t(x) = 3x + 1$ e $t(2) = 7$.

4. Sia dato l'integrale definito

$$I = \int_{-\sqrt{5}}^{0}\left(3(4+x^2)^{1/2}x + 2|x| + \left(x + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right)dx.$$

(3 pt.)

Allora $I =$ ____-14____ .

Sol.: Per simmetria si ha, $\int_{-\sqrt{5}}^{0}\left(x + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)dx = 0$. Per sostituzione si ha $\int_{-\sqrt{5}}^{0}\left(3(4+x^2)^{1/2}x + 2|x|\right)dx = ((4+x^2)^{3/2} - x^2)|_{-\sqrt{5}}^{0} = 8 - 0 - 27 + 5$.

5. Sia

$$l := \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2} + \frac{\sin(n^{-3})}{\log(1-n^{-3})}\right).$$

(3 pt.)

Allora $l =$ ____-1____ .

Sol.: $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2-(n-2)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}} = 0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n^{-3})}{\log(1+n^{-3})} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{-3}}{-n^{-3}} = -1$.

6. Sia

$$f(x) = \log\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right) + \arctan(e^x)$$

3 pt.

e sia g la funzione inversa di f. Allora $2g'(\pi/4) =$ 4/3 .

Sol.:

$$f(0) = \pi/4, \quad f'(x) = \frac{(x^2+1)}{x+1} \frac{x^2+1-(x+1)2x}{(x^2+1)^2} + \frac{e^x}{1+e^{2x}}, \quad f'(0) = 3/2$$

7. Sia $f(x) = |e^{-x}\cos(3x)|$, $x \in [0, +\infty)$. Quali delle seguenti proprietà ha f? A) continua, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona crescente, F) convessa, G) ha un asintoto verticale in $x = 0$, H) periodica.

4 pt.

La risposta è: **ACD**

8. Cosa dice il Criterio del rapporto per successioni? (La risposta corretta è una sola).

3 pt.

A) Sia a_n una successione positiva. Se esiste $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ e $\ell < 1$ allora $a_n \to 0$. Se $\ell > 1$ allora $a_n \to +\infty$.

B) Sia a_n una successione positiva. Se esiste $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ e $\ell < 1$ allora $a_n \to 0$. Se $\ell > 1$ allora $a_n \to +\infty$.

C) Sia a_n una successione positiva. Se esiste $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ e $\ell < 1$ allora $a_n \to 1$. Se $\ell \geq 1$ allora $a_n \to +\infty$.

La risposta è: **A**

9. Dato il parametro reale α e l'integrale improprio $I = \displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x^2 \sin(x)\arctan(x)}{(x-2)x^\alpha} dx$, stabilire quale (una sola) delle seguenti risposte è corretta:

5 pt.

(a) Per ogni α l'integrale diverge a $+\infty$

(b) L'integrale converge solo per $\alpha > 4$

(c) L'integrale converge solo per $\alpha > 0$

(d) L'integrale converge solo per $\alpha < 1$

✔ L'integrale converge solo per $\alpha > 2$