Ingegneria Edile-Architettura
29/1/2021

Analisi Matematica 1

Cognome: ______________________
Nome: ______________________

Appello online. Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18. Il tempo a disposizione è 2 ore.

1. Siano z_1 e z_2 le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 + 2iz - \sqrt{3}i = 0$.
Allora $|z_1 + z_2| =$ _____ 2 _____ .

3 pt.

Sol.: $z = -i \pm \sqrt{-1+\sqrt{3}i} = -i \pm \sqrt{2(\cos(\frac{2}{3}\pi) + i\sin(\frac{2}{3}\pi))} = -i \pm \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$. Quindi $|z_1 + z_2| = 2$.

2. Sia

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 8x + e^{2x} - 1}{\log(1+x) + \cos(x) - 1}.$$

3 pt.

Allora $I =$ _____ -4 _____ .

Sol.:

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 8x + e^{2x} - 1}{\log(1+x) + \cos(x) - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x - 8x + 2x}{x} = -4$$

3. Sia $f(x) = x^3 + 16$ e sia t la retta tangente al grafico di f che passa per $(0,0)$. Allora $t(1) =$ _____ 12 _____ .

3 pt.

Sol.: La retta tangente per $(x_0, f(x_0)$ è $y = x_0^3 + 16 + 3x_0^2(x - x_0) = 3x_0^2 x + 16 - 2x_0^3$. Impongo il passaggio per $(0,0)$ e trovo $2x_0^3 = 16$ da cui $x_0 = 2$, quindi la retta t è $y = 12x$ e $t(1) = 12$.

4. Sia dato l'integrale definito

$$I = \int_0^4 \sin(\pi\sqrt{x})\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{3+\cos(x)}\, dx$$

3 pt.

Allora $\pi I =$ _____ -4 _____ .

Sol.: Per simmetria si ha, $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{3+\cos(x)}\, dx = 0$. Quindi, per sostituzione con $t = \pi\sqrt{x}$, ho $I = \int_0^{2\pi} (\sin t) \frac{2t}{\pi^2}\, dt = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{2\pi} t\sin t\, dt = \frac{2}{\pi^2}(-t\cos(t) + \sin(t))_0^{2\pi} = \frac{-4}{\pi}$.

5. Sia $\log = \log_e$ e

$$l := \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{3n+5}{3n-7}\right)^{2n-1}.$$

3 pt.

Allora $l =$ _____ 8 _____ .

Sol.: $\left(\frac{3n+5}{3n-7}\right)^{2n-1} = e^{(2n-1)\log\left(1+\frac{12}{3n-7}\right)} = e^{(2n-1)\log(1+\frac{4}{n-7/3})} \sim e^{\frac{4(2n-1)}{n-7/3}} \to e^8$ per $n \to \infty$

6. Sia, per $x \in [0, 8]$,

$$f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{8-x}$$

e sia g la funzione inversa di f. Allora $g'(0) =$ ____2____ .

3 pt.

Sol.: $f(0) = 4$, $\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{8-x}}$, $f'(4) = \frac{1}{2}$ e quindi $g'(0) = 2$.

7. Sia $f(x) = |x-1|(x+2)^3$. Quali delle seguenti proprietà ha f? A) f è continua nel suo dominio, B) derivabile nel suo dominio, C) f è convessa in $(1, +\infty)$, D) superiormente limitata, E) monotona, F) ha minimo relativo in $x = 1$, G) ha minimi relativo in $x = -2$, H) ha massimo relativo in $x = 0$. La risposta è: ____**ACF**____

3 pt.

Sol.: Abbiamo: $dom(f) = \mathbf{R}$, f è prodotto di funzioni continue e quindi è continua, non è derivabile nel punto $x = 1$, $f'(x) = (x+2)^2(4x-1)$ per $x > 1$ e $f'(x) = -(x+2)^2(4x-1)$ per $x < 1$, quindi f non è monotona e ha massimo relativo in $x = 1/4$ e minimo relativo in $x = 1$. Inoltre $f''(x) = 6(x+2)(2x+1)$ per $x > 1$ e quindi f è convessa su $(1, +\infty)$.

8. Cosa dice il Criterio del rapporto per successioni? (La risposta corretta è una sola).

4 pt.

A) Sia a_n una successione positiva. Se esiste $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ e $\ell < 1$ allora $a_n \to 0$. Se $\ell > 1$ allora $a_n \to +\infty$.

B) Sia a_n una successione positiva. Se esiste $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ e $\ell < 1$ allora $a_n \to 0$. Se $\ell > 1$ allora $a_n \to +\infty$.

C) Sia a_n una successione positiva. Se esiste $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ e $\ell < 1$ allora $a_n \to 1$. Se $\ell \geq 1$ allora $a_n \to +\infty$.

La risposta è: ____**A**____

9. Dato il parametro reale α e l'integrale improprio $I = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{x^\alpha} dx$, stabilire quale (una sola) delle seguenti risposte è corretta:

5 pt.

(a) Per ogni α l'integrale diverge a $+\infty$

(✓) L'integrale converge solo per $\alpha > 0$

(c) L'integrale converge solo per $\alpha \geq 0$

(d) L'integrale converge solo per $\alpha > 1$

(e) L'integrale converge solo per $\alpha \geq 1$