Analisi Matematica 2 - 11/07/16 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola **Cognome e Nome**

A1. [**6 punti**] Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $\nabla f(-2,3) = (1/2, 1/3)$. Sia $g(x,y) = f(ax - 2e^y, by + 3e^x)$. Determinare il vettore $\nabla g(0,0)$ e poi stabilire per quali valori dei parametri a, $b \in \mathbb{R}$ il piano tangente a g in $(0, 0, g(0,0))$ è orizzontale.

$\nabla g(0,0) = \left(\left(\frac{a}{2} + 1\right), \left(-\frac{2}{2} + \frac{b}{3}\right)\right)$
$a = -2$, $b = 3$

A2. [**8 punti**] Calcolare l'integrale

$$I = \int_E \log(xy)\, dxdy$$

dove $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < -\frac{1}{2},\quad 4x < y < \frac{1}{x}\right\}$, esplicitando i seguenti passaggi: 1) impostare l'integrale doppio scrivendo in maniera esplicita gli estremi d'integrazione; 2) calcolare l'integrale I (utilizzando l'integrazione per parti).

$I = \int_{-1}^{-1/2} dx \int_{4x}^{1/x} \log(xy)\, dy = -3 + 5\log 2$

A3. [**6 punti**] Calcolare l'insieme di convergenza puntuale E della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{3^n + 1}$$

$E = (-1, 2)$

A4. [**6 punti**] Determinare i punti di massimo e minimo **assoluti** della funzione:

$$f(x,y) = x^2 - 7y$$

su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.

Min : $(0,1)$, MAX : $\left(\pm\frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{7}{8}\right)$

A5. [**8 punti**] Calcolare il flusso del campo $f(x,y,z) = (2x^2, 10y^3, 2z^2)$ uscente da $\partial\Omega$ dove

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 2\}$$

esplicitando i passaggi salienti.

$I = \iint_{\partial\Omega} f \cdot \nu\, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} f\, dxdydz =$
ν = normale uscente da $\partial\Omega$ | $= 30 \iiint_{\Omega} y^2 dxdydz = 8\pi\left(2^{5/2} - 1\right)$

B1. [12 punti] Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere o false barrando la casella corrispondente:

1. Se $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in N$, sono funzioni C^1 e $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ converge totalmente su $\mathbb{R}$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge puntualmente su $\mathbb{R}$

   $\boxed{\text{A}}$ VERO $\quad$ $\cancel{\boxed{\text{B}}}$ FALSO

2. Sia E l'insieme di convergenza puntuale della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, allora $x_0 \in E$

   $\cancel{\boxed{\text{A}}}$ VERO $\quad$ $\boxed{\text{B}}$ FALSO

3. Sia R il raggio di convergenza di una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, allora la serie non converge per $|x-x_0| \geq R$

   $\boxed{\text{A}}$ VERO $\quad$ $\cancel{\boxed{\text{B}}}$ FALSO

B2. [12 punti] Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere o false barrando la casella corrispondente:

1. f continua su $\mathbb{R}$ allora $D_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y = f(x)\}$ è un insieme chiuso in $\mathbb{R}^2$

   $\cancel{\boxed{\text{A}}}$ VERO $\quad$ $\boxed{\text{B}}$ FALSO

2. D_f è un insieme chiuso in $\mathbb{R}^2$ allora f è continua su $\mathbb{R}$

   $\boxed{\text{A}}$ VERO $\quad$ $\cancel{\boxed{\text{B}}}$ FALSO

3. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è derivabile in ogni direzione in 0 allora f è continua in 0

   $\boxed{\text{A}}$ VERO $\quad$ $\cancel{\boxed{\text{B}}}$ FALSO

B3. [5 punti] Sia $F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$. Allora quale delle seguenti risposte è corretta (barrare una sola risposta): $\cancel{\boxed{\text{A}}}$ F è conservativo su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\boxed{\text{B}}$ $\int_\gamma F\,dr = 1$, dove γ è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 percorsa in senso antiorario $\boxed{\text{C}}$ $F = \nabla U$ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dove $U = \log(x^2+y^2)$ $\boxed{\text{D}}$ $\int_\gamma F\,dr = 1$, dove γ è la parte di circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 che va dal punto $a = (1,0)$ al punto $b = (-1,0)$ percorsa in senso antiorario.

B4. [5 punti] Dato un intervallo $[a,b]$, $0 \leq a < b$ e $f,\, g \in C^0([a,b])$ tali che $0 \leq g(y) \leq f(y)$ per ogni $y \in [a,b]$. Il volume della regione solida $E \subset \mathbb{R}^3$ ottenuta ruotando di 2π la lamina piana $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x = 0, y \in [a,b], \, g(y) \leq z \leq f(y)\}$ attorno all'asse z vale (barrare una sola risposta): $\boxed{\text{A}}$ $-2\pi \int_a^b y(f(y)-g(y))\,dy$ $\boxed{\text{B}}$ $\pi \int_a^b y(f(y)-g(y))\,dy$ $\boxed{\text{C}}$ $2\pi \int_a^b (f(y)-g(y))\,dy$ $\cancel{\boxed{\text{D}}}$ $2\pi \int_a^b y(f(y)-g(y))\,dy$.