Analisi Matematica 2 - 12/09/16 - Tempo a disposizione: 3h

Matricola **Cognome e Nome**

A1. [6 punti] Calcolare, esplicitando i conti principali nel riquadro, il valore $\ell = \lim_{a\to+\infty} L_a(\varphi)$, dove φ è la curva $\varphi(t) = (e^{1/t}\sin(1/t), e^{1/t}\cos(1/t))$, $t \in [1,a]$ e $L_a(\varphi)$ denota la lunghezza della curva φ.

$L_a(\varphi) = \sqrt{2}\int_1^a e^{1/t}/t^2\,dt = -\sqrt{2}\,e^{1/a} + \sqrt{2}\,e$

$\ell = \lim_{a\to+\infty} L_a(\varphi) = \sqrt{2}(e-1)$

A2. [8 punti] Stabilire se il campo $F(x,y) = \left(\frac{3(2xy)}{(2+x^2)^2}, -\frac{3}{2+x^2}\right)$ è conservativo su $\mathbb{R}^2$ (mostrando i passaggi salienti). In caso affermativo, calcolarne il potenziale U tale che $U(1,0) = 4$ (mostrando i passaggi salienti).

$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{6x}{(2+x^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \Rightarrow F$ è conservativo

$U(x,y) = -\frac{3y}{2+x^2} + 4$

A3. [6 punti] Data $f(x,y) = (1+x-y^2)^{1/2}$ scrivere i) il gradiente di f in $(0,0)$, ii) la matrice hessiana di f in $(0,0)$ e iii) lo sviluppo di Taylor con resto di Peano arrestato al second'ordine nel punto $(0,0)$.

i) $\nabla f(0,0) = (\frac{1}{2}, 0)$ ii) $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

iii) $f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + o(x^2+y^2)$

A4. [6 punti] Calcolare l'insieme di convergenza puntuale E della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+3}{n+2}\right)(4x)^n$$

$E = [-1/4, 1/4)$

A5. [8 punti] Calcolare l'integrale

$$I = \int_E \frac{\sin(y^2)}{y}\,dxdy$$

dove $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y^2, \quad \sqrt{\pi} \le y \le \sqrt{2\pi}\right\}$ impostando l'integrale doppio scrivendo in maniera esplicita gli estremi d'integrazione.

$I = \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^{y^2} \frac{\operatorname{sen} y^2}{y}\,dx\right] dy = -\frac{1}{2}\cos y^2 \Big|_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}}$

$= -\frac{1}{2}(\cos 2\pi - \cos\pi) = -1$

B1. [7 punti] Sia R il raggio di convergenza della serie di potenze

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Allora $s^3(x_0)$ (dove s^3 indica la derivata di ordine 3 di s) vale (barrare una sola risposta):

$\boxed{\text{A}}$ $s^3(x_0) = 3!a_3$ $\boxed{\text{B}}$ $s^3(x_0) = a_3$ $\boxed{\text{C}}$ $s^3(x_0) = (x_0)^3$ $\boxed{\text{D}}$ $s^3(x_0) = (3-1)!a_3$.

B2. [8 punti] Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quale delle seguenti risposte è corretta (barrare una sola risposta):

$\boxed{\text{A}}$ f è continua ma non differenziabile in $(0,0)$ $\boxed{\text{B}}$ f è continua in $(0,0)$ ma non esiste nessuna derivata direzionale in $(0,0)$ $\boxed{\text{C}}$ f è discontinua in $(0,0)$ e $\nabla f(0,0) = (0,0)$ $\boxed{\text{D}}$ f è differenziabile in $(0,0)$.

B3. [7 punti] Sia

$$f_\alpha(x,y) = e^{\alpha x} \sin((\alpha^2 - 1)y)) \cos(x^2)$$

e sia v il versore $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Allora tutti e soli i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $D_v f_\alpha(0,0) = \sqrt{2}$ (dove D_v denota la derivata nella direzione v) sono quelli che verificano (barrare una sola risposta):

$\boxed{\text{A}}$ $\alpha = -1$ $\boxed{\text{B}}$ $\alpha = \pm 1$ $\boxed{\text{C}}$ $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ $\boxed{\text{D}}$ $\alpha^2 - 1 = 2$.

B4. [12 punti] Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere o false barrando la casella corrispondente:

1. Sia $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua dove $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$, allora f ammette massimo assoluto su E.

   $\boxed{\text{A}}$ VERO $\boxed{\text{B}}$ FALSO

2. Sia $f(x,y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$ allora $\Delta f = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (qui Δ denota l'operatore Laplaciano).

   $\boxed{\text{A}}$ VERO $\boxed{\text{B}}$ FALSO

3. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è tale che $\nabla f(0) = 0$ allora f è continua in 0

   $\boxed{\text{A}}$ VERO $\boxed{\text{B}}$ FALSO