Analisi Matematica 2 - 20/02/17 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola Cognome e Nome

A1. [8 punti] Determinare il raggio di convergenza e l'insieme E di convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^3}{3^n + n^2} x^n$$

esplicitando i conti.

$R = \frac{3}{2}$, $E = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Infatti $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n+n^3}{3^n+n^2}} = \frac{2}{3}$
Inoltre per $x = \frac{3}{2}$ il t. generale tende a 1 e per $x = -3/2$ non ha limite, per cui non ho convergenza

A2. [6 punti] Data $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ la curva in $\mathbb{R}^2$ rappresentata dalle equazioni $x(t) = e^{1/t}\sin(1/t)$, $y(t) = e^{1/t}\cos(1/t)$, $t \in [1,4]$ calcolare la lunghezza $L(\gamma)$ di γ esplicitando i conti.

$L(\gamma) = \int_1^4 \sqrt{\frac{e^{2/t}}{t^4} + \frac{e^{2/t}}{t^4}}\, dt = \sqrt{2}\int_1^4 \frac{e^{1/t}}{t^2}\, dt = -\sqrt{2}e^{1/t}\Big|_1^4$
$= -\sqrt{2}e^{1/4} + \sqrt{2}e$

A3. [6 punti] Determinare gli estremi della funzione $f(x,y) = x^2 - y$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$ usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange ed esplicitando i passaggi salienti.

Non ci sono punti stazionari in E perciò gli estremi sono su ∂E. $\mathcal{L} = x^2 - y - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)$
$\Rightarrow (0,1) =$ p.to di min. ass. $(\pm\sqrt{63}/4, -1/8) =$ p.ti di max ass.

A4. [8 punti] Calcolare l'integrale

$$I = \int_E \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$$

dove $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4x < 0\}$, esplicitando i passaggi intermedi.

$\Omega' = \{0 < \rho < 4\cos\theta, -\pi/2 < \theta < \pi/2\}$ $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\text{sen}\,\theta$
$I = \iint_{\Omega'} \rho^2\, d\rho\, d\theta = \frac{4^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta = \frac{4^3 \cdot 4}{9} = \frac{4^4}{9} = \frac{256}{9}$

A5. [6 punti] Sia $F(x,y,z) = (2y+1, 2x-1, 2z)$ un campo vettoriale. Stabilire se F risulta conservativo motivando la risposta e in caso affermativo determinarne il potenziale U che in $(0,0,0)$ vale 1.

$F \in C^\infty$, $\text{rot}\, F = 0 \Rightarrow F$ conservativo
$\frac{\partial U}{\partial x} = 2y+1$, $\frac{\partial U}{\partial y} = 2x-1$, $\frac{\partial U}{\partial z} = 2z \Rightarrow$
$U(x,y,z) = (2y+1)x - y + z^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$

$U(0,0,0) = 1 \Rightarrow c = 1$

B1. **[9 punti]** Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere o false barrando la casella corrispondente:

1. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e siano $g(t) = f(2+tv_1, 4+tv_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ un versore di $\mathbb{R}^2$, allora $D_v f(2,4) = g'(0)$.

   $\boxed{A}$ VERO $\boxed{B}$ FALSO

2. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e siano $g(t) = f(tv_1, tv_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ un versore di $\mathbb{R}^2$, allora $D_v f(2,4) = g'(0)$.

   $\boxed{A}$ VERO $\boxed{B}$ FALSO

3. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e sia $v = (v_1, v_2)$ un versore di $\mathbb{R}^2$, allora $D_v f(2,4) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(2+tv_1, 4+tv_2)}{t}$.

   $\boxed{A}$ VERO $\boxed{B}$ FALSO

B2. **[10 punti]** Data la funzione

$$f(x,y) = \left(1 + x - y^2\right)^{1/3}.$$

Quale delle seguenti risposte è corretta (barrare una sola risposta):

$\boxed{A}$ lo sviluppo di Taylor di f in $(0,0)$ arrestato al second'ordine vale $1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}y^2+o(x^2+y^2)$
$\boxed{B}$ lo sviluppo di Taylor di f in $(0,0)$ arrestato al second'ordine vale $1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{3}y^2+o(x^2+y^2)$
$\boxed{C}$ lo sviluppo di Taylor di f in $(0,0)$ arrestato al second'ordine vale $1+\frac{1}{3}x+o(\sqrt{x^2+y^2})$ $\boxed{D}$ lo sviluppo di Taylor di f in $(0,0)$ arrestato al second'ordine vale $1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}y^2-\frac{2}{3}xy+o(x^2+y^2)$.

B3. **[9 punti]** Sia Ω un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^2$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua allora

1. f è limitata

   $\boxed{A}$ VERO $\boxed{B}$ FALSO

2. f è integrabile

   $\boxed{A}$ VERO $\boxed{B}$ FALSO

3. f è integrabile se Ω è regolare

   $\boxed{A}$ VERO $\boxed{B}$ FALSO

B4. **[6 punti]** Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere o false barrando la casella corrispondente:

1. Sia E l'insieme di convergenza puntuale della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, allora $x_0 \in E$

   $\boxed{A}$ VERO $\boxed{B}$ FALSO

2. Sia R il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, allora la serie non converge per $x < x_0 - R$

   $\boxed{A}$ VERO $\boxed{B}$ FALSO