Analisi Matematica 2 - 23/09/16 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola Cognome e Nome

A1. [5 punti] Calcolare l'insieme di convergenza puntuale E della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^{3n}}{(n+2)2^n}$$

$E = (-2^{1/3}, 2^{1/3})$

A2. [9 punti] Calcolare l'integrale

$$I = \int_E xy \, dxdy$$

dove $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, \quad x^2 + y^2 < 2x, \quad y > 0\}$ impostando l'integrale doppio scrivendo in maniera esplicita l'eventuale cambiamento di variabile utilizzato e gli estremi d'integrazione nelle nuove variabili.

$I = \iint_{\Omega_1} \rho^3 \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \, d\rho d\vartheta + \iint_{\Omega_2} \rho^3 \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \, d\rho d\vartheta = \frac{5}{48}$

$\Omega_1 = \{0 < \rho < 1, 0 < \vartheta < \pi/3\}, \Omega_2 = \{0 < \rho < 2\cos\vartheta, \pi/3 \le \vartheta < \pi/2\}$

A3. [6 punti] Data $f(x,y) = (y-1)(y^2-x^2)$ determinare su $\mathbb{R}^2$ i) i suoi punti stazionari, ii) i punti estremanti, specificando se si tratta di massimi o minimi, iii) stabilire se f è limitata superiormente e/o inferiormente e, in caso affermativo, calcolare gli estremi superiore ed inferiore di f.

i) $(0,0), (\pm 1, 1), (0, 2/3)$ ii) $(0, 2/3)$ p.to min

iii) no : $f(0,y) = (y-1)y^2 \to \pm\infty$ se $y \to \pm\infty$

A4. [7 punti] Calcolare, esplicitando i conti principali nel riquadro, l'integrale culvilineo

$$I = \int_\gamma \arctan\sqrt{xy} \, ds$$

dove γ è il segmento che unisce i punti $(0,0)$ e $(1,1)$.

$I = \int_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{t^2} \cdot \sqrt{2} \, dt \underset{\text{parti}}{=} \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\log 2 + \operatorname{arctg} 1\right)$
$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\log 2 + \pi/4\right)$

A5. [7 punti] Calcolare il flusso Φ del campo $F(x,y,z) = (x,y,z^2)$ uscente da ∂D dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 < z < -x^2 - y^2\}$ (mostrando i passaggi salienti).

$\Phi \underset{\text{Teo. divergenza}}{=} \iiint_D \operatorname{div} F \, dxdydz = \iiint_D (2+2z) \, dxdydz =$
$= 2\iint_\Omega \left(z + \frac{z^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{-x^2-y^2} dxdy = \pi/3$

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

B1. [8 punti] Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{(x^4+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quale delle seguenti risposte è corretta (barrare una sola risposta):

$\cancel{\boxed{A}}$ f è discontinua in $(0,0)$ ~~ma~~ e non esistono tutte le derivate direzionali di f in $(0,0)$ $\boxed{B}$ f è discontinua in $(0,0)$ e non esiste $\nabla f(0,0)$ $\boxed{C}$ f è differenziabile in $(0,0)$ $\boxed{D}$ f è continua ma non differenziabile in $(0,0)$.

B2. [7 punti] Sia $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ e

$$f(x) = \arctan(x_1^2) + \log(x_2 x_3) + 2x_1 \frac{x_3^2}{2} \sin(x_5).$$

Allora $D^\alpha f(x)$, dove $\alpha = (1,0,2,0,1)$ e D^α denota la derivata di ordine α di f, vale (barrare una sola risposta):

$\boxed{A}$ $D^\alpha f(x) = -2\cos(x_5)$ $\boxed{B}$ $D^\alpha f(x) = \dfrac{1}{1+x_1^4}$ $\boxed{C}$ $D^\alpha f(x) = \dfrac{1}{x_2 x_3}$ $\cancel{\boxed{D}}$ $D^\alpha f(x) = 2\cos(x_5)$.

B3. [12 punti] Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere o false barrando la casella corrispondente:

1. Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Allora esistono $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, tali che $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

   $\boxed{A}$ VERO $\cancel{\boxed{B}}$ FALSO

2. Sia f differenziabile in $\mathbb{R}$ allora $f \in C^1(\mathbb{R})$.

   $\boxed{A}$ VERO $\cancel{\boxed{B}}$ FALSO

3. Sia $g(x) = f(\|x\|)$ dove $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono di classe C^2. Allora $g_{x_i} = f'(\|x\|)x_i$, $i = 1, \dots, n$.

   $\boxed{A}$ VERO $\cancel{\boxed{B}}$ FALSO

B4. [7 punti] Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta (barrare una sola risposta):

$\boxed{A}$ se $x \in \partial A$ allora $x \in A$ dove ∂A denota la frontiera di A $\boxed{B}$ se $x \in \bar{A}$ allora $x \in A$ $\boxed{C}$ se $x \in \bar{A}$ allora $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$, dove $\bar{A}$ denota la chiusura di A $\cancel{\boxed{D}}$ se $x \in A \cap \partial A$ allora $x \in \bar{A}$, dove ∂A e $\bar{A}$ denotano la frontiera e la chiusura di A, rispettivamente.