Analisi Matematica 2 - 13/06/16 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola **Cognome e Nome**

A1. [6 punti] Stabilire per quali valori di α, β e γ in $\mathbb{R}$ la funzione

$$P(x,y) = \alpha x - \beta y - 2 + 2xy + \gamma x^2 - y^2$$

ha un punto di massimo in $(0,0)$ $\boxed{\alpha = \beta = 0 \quad e \quad \gamma \leq -1}$

A2. [5 punti] Calcolare l'insieme di convergenza puntuale E e la somma S della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{x-\pi} \right)^n$$

$\boxed{E = (-\infty, \pi/2] \quad , \quad S(x) = \log\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)}$

A3. [7 punti] Calcolare il lavoro L del campo

$$F(x,y) = \left(y \log(1+x^2y) + \frac{2x^2y^2}{1+x^2y}, x \log(1+x^2y) + \frac{x^3y}{1+x^2y} \right)$$

lungo l'arco di cerchio γ di raggio 1 e centro $(0,0)$ che va dal punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ al punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\boxed{L = 1/2 \log\left((2\sqrt{2}-1)/(2\sqrt{2}+1)\right)}$

A4. [5 punti] Data la funzione

$$g(x,y,z) = z \int_0^{x-y} e^{t^2} \, dt$$

e il versore $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$, calcolare $D_{\vec{v}}\, g(2,2,1)$

$\boxed{D_{\underline{v}}\, g(2,2,1) = 2/\sqrt{3}}$

A5. [7 punti] Calcolare l'integrale

$$I = \int_E x \, dxdydz$$

dove E è la regione racchiusa tra la superficie $\{z = x^2 + y^2\}$ ed il piano $\{4x + z = -3\}$

$\boxed{I = -\pi}$

B1. [**4 punti**] Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ un versore. Quale affermazione è corretta (barrare una sola risposta):

$\boxed{A}$ $D_{\vec{v}}f(2,4) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(2+tv_1, 4+tv_2)}{t}$ $\boxed{B}$ $D_{\vec{v}}f(2,4) = g'(0)$ dove $g(t) = f(tv_1, tv_2)$ $\cancel{\boxed{C}}$ $D_{\vec{v}}f(2,4) = g'(0)$ dove $g(t) = f(2+tv_1, 4+tv_2)$ $\boxed{D}$ $D_{\vec{v}}f(2,4) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(tv_1, tv_2) - f(2,4)}{t}$.

B2. [**6 punti**] Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere o false barrando la casella corrispondente:

1. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è limitato e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e limitata allora f è integrabile in Ω

   $\boxed{A}$ VERO $\cancel{\boxed{B}}$ FALSO

2. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è regolare e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e limitata allora f è integrabile in Ω

   $\cancel{\boxed{A}}$ VERO $\boxed{B}$ FALSO

3. Siano $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni continue per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\{a_n\} \in \mathbb{R}^+$ tali che $|f_n(x)| \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora, se la $\sum_n f_n(x)$ converge puntualmente ad $f(x)$ su $\mathbb{R}$, f è continua su $\mathbb{R}$

   $\boxed{A}$ VERO $\cancel{\boxed{B}}$ FALSO

B3. [**8 punti**] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^2 e $a \in \mathbb{R}^n$ e $g(x) = f(a \cdot x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Calcolare:

- $g_{x_i}(x) =$ $f'(a \cdot x) a_i$
- $\|\nabla g(x)\| =$ $|f'(a \cdot x)| \, \|a\|$
- $g_{x_i x_j}(x) =$ $f''(a \cdot x)\, a_i a_j$
- $\Delta g(x) =$ $f''(a \cdot x)\, \|a\|^2$

B4. [**6 punti**] Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^5y^2)^{1/3}\cos(x)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quale delle seguenti risposte è corretta (barrare una sola risposta): $\boxed{A}$ f è discontinua in $(0,0)$ e $\nabla f(0,0) = (0,0)$ $\boxed{B}$ f è continua in $(0,0)$ e $D_{\vec{v}}f(0,0) = |v_1|^{5/3}|v_2|^{2/3}$ per ogni versore $\vec{v} = (v_1, v_2)$ $\cancel{\boxed{C}}$ f è continua ma non differenziabile in $(0,0)$ $\boxed{D}$ f è differenziabile in $(0,0)$.

B5. [**4 punti**] Sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, \quad y \in (3,4)\}$. Allora quale delle seguenti risposte è corretta (barrare una sola risposta): $\boxed{A}$ E è chiuso in $\mathbb{R}^2$ $\boxed{B}$ E è aperto in $\mathbb{R}^2$ $\boxed{C}$ $E = \bar{E}$ in $\mathbb{R}^2$ $\cancel{\boxed{D}}$ E non è né aperto né chiuso in $\mathbb{R}^2$.