

Equazioni alle derivate parziali II

A.A. (2008/09) 2009/2010

Cecilia Condateno - Elisabetta Rocca

Spazi di Sobolev

Esempio

Consideriamo il seguente problema (ben noto!!)

Dato $f \in C([a, b])$ trovare una funzione $u = u(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che sia soluzione di

$$(1) \begin{cases} -u'' + u = f & \text{su } [a, b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(problema} \\ \text{ai limiti)} \\ \text{o al contorno} \end{matrix}$$

Una soluzione CLASSICA o FORTE del problema (1) è una funzione $u \in C^2([a, b])$

che verifica $\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & \forall x \in [a, b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$

• Altro approccio. Moltiplichiamo l'equazione differenziale per $\varphi \in C^1([a, b]) : \varphi(a) = \varphi(b) = 0$ e integriamo su (a, b) . Otteniamo

$$-\int_a^b u''(x) \varphi(x) dx + \int_a^b u(x) \varphi(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx$$

Integrazione per parti $\Rightarrow (-u'(x) \varphi(x)) \Big|_a^b = 0$

$$\int_a^b u'(x) \varphi'(x) dx + \int_a^b u(x) \varphi(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx$$

2)

L'equazione:

$$(2) \int_a^b u'(x) \varphi'(x) + \int_a^b u(x) \varphi(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx$$

$$\forall \varphi \in C^1([a, b])$$

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

ha significato anche se $u \in C^1([a, b])$

Diremo che $u \in C^1([a, b])$ con $u(a) = u(b) = 0$ è soluzione DEBOLLE di (1) se verifica

(2) - (analogia con (PC) e (PV) per equazioni ordinarie)

Domanda: (i) (2) ha significato anche se u e $u' \in L^1(a, b)$ - In tal caso che relazione c'è tra u e u' ? u' è la derivata di u in che senso?

(ii) se u e $u' \in L^1(a, b)$ che significato hanno le condizioni $u(a) = u(b) = 0$?

(iii) se $u \in C^1([a, b])$ è soluzione di (2) e soddisfa $u(a) = u(b)$, allora u è anche soluzione di (1)? (PC) (PV)

Più in generale: se consideriamo problemi ai valori iniziali e al contorno per EDP è molto difficile lavorare in ambito classico (funzioni di classe $C^k(\bar{\Omega})$).

Occorre introdurre spazi funzionali ad hoc in cui risolvere i problemi, eventualmente riformulati in versione DEBOLLE.

⇒ motivazione per l'introduzione
degli spazi di Sobolev.

Gli spazi di Sobolev in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (contorno regolare) sono una famiglia di spazi funzionali simili a $C^k(\bar{\Omega})$.

Sono simili nel senso che sono costituiti da funzioni con condizioni sulle loro derivate. Più precisamente, invece di assumere che le derivate appartengano a $C^k(\bar{\Omega})$, negli spazi di Sobolev si richiede che le "derivate" di funzioni $\in L^p(\Omega)$ siano anch'esse elementi di $L^p(\Omega)$.

Ma in questo contesto cosa sono le derivate?

Dobbiamo preliminarmente introdurre una nozione di derivata che ci permetta di dare risposte a tutte le questioni sollevate:

la derivata DISTRIBUTIONALE

4) Le distribuzioni Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ~~dominio~~ ~~aperto~~ ~~limitato~~ ~~comnesso~~

$C_c^\infty(\Omega)$ spesso funzioni a supporto compatto in Ω che vengono definite infinite volte

$$(\text{supp } u = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \neq 0\} = K \subset \subset \Omega)$$

N.B.: Le funzioni di $C_c^\infty(\Omega)$ vengono anche dette funzioni test

Si può introdurre

Introduzione in $C_c^\infty(\Omega)$ una Topologia
~~attraverso la convergenza~~ ~~che esse inducono~~ ~~definita per semplicità~~ ~~di test~~ ~~all'Heaviside~~

Definizione: Siano φ_k e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

Si dice che $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $C_c^\infty(\Omega)$ se

i) $\exists$ un compatto $K \subset \subset \Omega$ che contiene tutti i supporti delle φ_k

ii) $D^\alpha \varphi_k \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente in Ω

$$\left(\sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \varphi_k(x) - D^\alpha \varphi(x)| \rightarrow 0 \right)_{k \rightarrow +\infty} \quad (\Rightarrow \text{supp } \varphi \subset K)$$

$\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ multiindice

$$(D^\alpha u = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u)$$

Definizione $\mathcal{D}(\Omega)$ è lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ con la topologia sopra descritta

Osservazione Se $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ ~~in $C_c^\infty(\Omega)$~~ $= \mathcal{D}(\Omega)$
 $D^\alpha \varphi_k \rightarrow D^\alpha \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ ~~in $C_c^\infty(\Omega)$~~ $\forall \alpha \text{ m.i.}$

Nei prerequisiti abbiamo ricordato (5)
 i funzionali (lineari) e continui in spazi
 normati. Si possono dare definizioni
 analoghe anche in spazi topologia

In particolare qui diciamo che
Definizione: Un ^{operatore} funzionale (lineare) $L: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ su $\mathcal{D}(\Omega)$ è

continuo in $\mathcal{D}(\Omega)$ quando:
 $(L: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, L \text{ lineare})$ $L(\varphi_k) \rightarrow L(\varphi) \text{ (in } \mathbb{R})$
 $\forall \varphi_k \rightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow$ ~~$L(\varphi_k) \rightarrow L(\varphi)$~~

(N.B. Poiché L è lineare è sufficiente
 verificare la condizione nel caso $\varphi = 0$)

Definizione Una distribuzione è
 un funzionale lineare e continuo su
 $\mathcal{D}(\Omega)$. L'insieme delle distribuzioni
 si indica con $\mathcal{D}'(\Omega)$

(duale di $\mathcal{D}(\Omega)$: attenzione!! ~~è uno~~
 spazio topologico!!) che induce la ^{convergenza} sequenza ~~alef.~~ di ~~valori~~

Definizione: $L_k \rightarrow L$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ se

$$\langle L_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle L, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

6/ Esempio (1)

osserviamo che se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{u \text{ misurabile su } \Omega : u \in L^1(K), \forall K \subset \subset \Omega\}$$

Allora Gf è ben definito:

$$\langle Gf, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Gf è un funzionale lineare su $\mathcal{D}(\Omega)$.

Gf è continuo su $\mathcal{D}(\Omega)$. (Se $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$)

$$\rightarrow \left| \int_{\Omega} f(x) (\varphi_k(x) - \varphi(x)) dx \right| \leq \int_K |f(x)| |\varphi_k(x) - \varphi(x)| dx$$

$$\leq \sup_{x \in K} |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \underbrace{\int_K |f(x)| dx}_{f \in L^1_{loc}(\Omega)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$(!) (K \supset \text{supp } \varphi_k \subset \text{supp } \varphi) \quad f \in L^1_{loc}(\Omega)$$

Quindi Gf è una distribuzione

e con abuso di notazione (identificando

f con Gf) diremo che

$$\text{se } f \in L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow f \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

$$\text{Inoltre: } \forall p: 1 \leq p < \infty \Rightarrow$$

$$\text{se } f \in L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow f \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$\text{N.B.: } L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega) \quad \begin{matrix} u_k \rightarrow u \text{ in } L^p(\Omega) \Rightarrow \\ u_k \rightarrow u \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega) \end{matrix}$$

Esempio ② Sia $[0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n]$ (7)

L'operatore
~~è~~ funzionale lineare

$\delta_0: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ così definito

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

è un elemento di $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Sufficienza $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow$
(φ_k conv. unif. a φ su $\Omega \Rightarrow$ prod. su Ω)

$$\langle \delta_0, \varphi_k \rangle = \varphi_k(0) \rightarrow \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

In generale $\delta_{\tilde{x}}: \langle \delta_{\tilde{x}}, \varphi \rangle = \varphi(\tilde{x})$
 $[x \in \Omega] \rightarrow$

è un elemento di $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Questa distribuzione è detta

DELTA (massa, misura) di DIRAC.

Attenzione! non è identificabile con
una funzione.

Abbiamo ora tutti gli ingredienti
per definire le derivate distribuzionali

(ovvero le derivate delle distribuzioni

che possono anche non essere delle
funzioni !!)

8) DERIVATE DISTRIBUTIONALI [Ω bordo "regolare"]

Prendiamo: sia $u \in C^1(\Omega)$ e sia φ una funzione test ($\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$).

Allora applicando la formula di Gauss-Green si ha: (n normale
esterna a Ω)

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi \, dx = \int_{\partial\Omega} u n_j \varphi \, dy - \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx$$

$$\left(\varphi|_{\partial\Omega} = 0 \right) = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx$$

$$\boxed{\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Da questa relazione possiamo quindi definire la motivazione per la seguente:

Definizione Sia $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ - la derivata (distribuzionale) $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ è la distribuzione definita da:

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'} = - \left\langle F, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathcal{D}} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

N.B Se $u \in C^1(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j}$ classica coincide con $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ distribuzionale.

Proposizione ① La derivata di una (9)
distribuzione è sempre definita

• $- \langle F, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle$ è un funzionale lineare su $\mathcal{D}(\Omega)$

• Se $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow$$

$\langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, \varphi_k \rangle = \langle F, \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \rangle$ ~~è continuo su $\mathcal{D}(\Omega)$~~
il funzionale è continuo! $\rightarrow - \langle F, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle = \langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, \varphi \rangle$

Proposizione ② Ogni distribuzione
è derivabile (in $\mathcal{D}'(\Omega)$) infinita
volte. Valgono inoltre le formule

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)$$

Vediamo ora alcuni esempi
di elementi di $\mathcal{D}'(\Omega)$ e
le loro derivate in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

10) Esempio (1)

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$\Omega = (-1, 1)$
 $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \Rightarrow$
 $H \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Voglio costruire la sua derivata
distribuzionale

(N.B. derivata classica $H'(x) \equiv 0$ q.o.o. su $\mathbb{R}$!!)

Per definizione:

$$\langle H', \varphi \rangle = - \langle H, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow$$

$$\langle H, \varphi' \rangle = \int_{-1}^1 H(x) \varphi'(x) dx = \int_0^1 \varphi'(x) dx = -\varphi(0) \Rightarrow$$

$$\langle H', \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle \Rightarrow \boxed{H' = \delta_0}$$

Quindi la derivata distribuzionale
della Heaviside non è identificabile
con una funzione !!

Esempio (1 bis)

per esercizio

$$V(x) = (\text{signum } x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

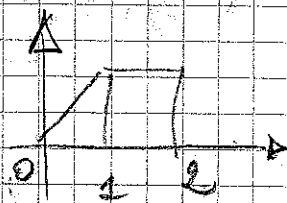
$\Omega = (-1, 1)$
 $V'(x) = 2\delta_0$
 distribuzionale

(N.B. $V'(x) \equiv 0$ q.o.o. su $\mathbb{R}$ (derivata classica))

Esempio (3)

$$\Omega = (0, 2)$$

$$u(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \\ 1 & 1 < x < 2 \end{cases}$$



$u \in \mathcal{D}'(0, 2)$ - calcolo u' (distribuzionale)

$$\langle u', \varphi \rangle = - \langle u, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\begin{aligned} \langle u, \varphi' \rangle &= \int_0^2 u(x) \varphi'(x) dx = \int_0^1 x \varphi'(x) dx + \int_1^2 1 \varphi'(x) dx \\ &= x \varphi(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi(x) dx + \varphi(2) - \varphi(1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \varphi(1) - \int_0^1 \varphi(x) dx - \varphi(1) = - \int_0^1 \varphi(x) dx \\ &= - \int_0^1 \varphi(x) dx \end{aligned}$$

(φ è
a supporto
compatto
($\varphi(2)=0$!!))

$$\langle u', \varphi \rangle = - \langle u, \varphi' \rangle = \int_0^1 \varphi(x) dx \Rightarrow$$

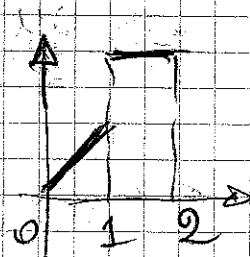
$$u'(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

NB: u e u' sono definibili come voglio.

Quindi $u' \in L^1_{loc}(0, 2)$. E' identificabile con una funzione!!

Esempio (4)

$$V(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \\ 2 & 1 < x < 2 \end{cases}$$



$$V \in \mathcal{D}'(0, 2)$$

$$\langle V', \varphi \rangle = - \langle V, \varphi' \rangle = - \int_0^1 x \varphi'(x) dx - \int_1^2 2 \varphi'(x) dx =$$

$$= -x \varphi(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 \varphi(x) dx - 2 \varphi(2) + 2 \varphi(1) =$$

$$= \int_0^1 \varphi(x) dx + \varphi(1) \Rightarrow V' = u' + \delta_1$$

(φ è a supporto compatto!!)

Esempio (3) ↑

↑ delta

12) Possiamo ora definire gli spazi di Sobolev.

Gli spazi di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Definizione = $\{u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \forall i=1, \dots, n\}$

• $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha|=1\}$

↑
derivata distribuzionale

• $W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \text{ m.i. con } |\alpha| \leq k\}$

↑
derivata distribuzionale

Definizione equivalente:

• $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists g_1, \dots, g_n \in L^p(\Omega) :$

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \forall i=1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$$

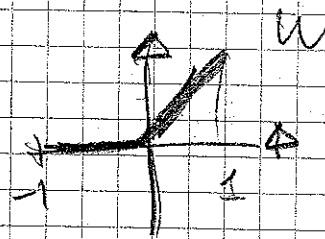
• $W^{k,p}(\Omega) = \{u \in W^{k-1,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{k-1,p}(\Omega), \forall i=1, \dots, n\}$
($k \geq 2$)

Negli spazi di Sobolev le derivate distribuzionali sono identificabili con funzioni!!

Es. 1 (per tutti i rich. esempi precedenti)
 $\Omega = (-1, 1)$

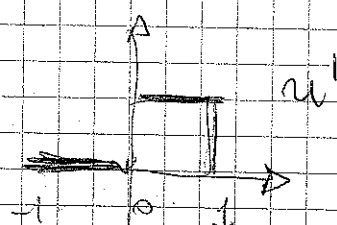
(13)

→ 2) $u(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x \leq 0 \\ x & 0 < x < 1 \end{cases}$



$u \in L^p(-1, 1) \quad \forall p \geq 1$

$u'(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$

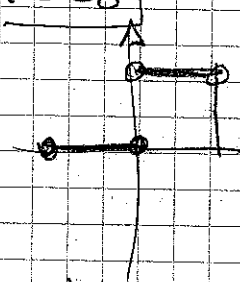


→ $u' \in L^p(\Omega) \quad \forall p \geq 1$

$\Rightarrow u \in W^{1,p}(-1, 1) \quad \forall p$

$u \in W^{2,p}(-1, 1)$
 $[u'' = \delta_0]$

→ 1) $v(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$



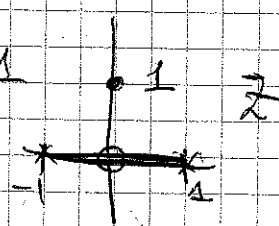
$v \in L^p(-1, 1) \quad \forall p \geq 1$

$[v' = \delta_0] \Rightarrow v \notin W^{1,p}(\Omega) \text{ per alcun } p$

↓ Quella se $v'(x) = 0$ q.o. in $(-1, 1)$
 (derivata classica)

NB u dell'esempio 2)
 $u \notin W^{2,p}(-1, 1)$

3) $z(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \quad -1 < x < 1 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$



$z \in L^p(-1, 1) \quad \forall p \geq 1$

$\langle z, \varphi \rangle = -\langle z, \varphi' \rangle = -\left\{ \int_{-1}^0 0 \cdot \varphi' + \int_0^1 0 \cdot \varphi' \right\} = 0 = \int_{-1}^1 0 \cdot \varphi$

$\Rightarrow z' \equiv 0 \Rightarrow z \in W^{1,p}(-1, 1) \quad \forall p \geq 1.$

14) Proprietà degli spazi $W^{k,p}(\Omega)$

- Possiamo introdurre in $W^{k,p}(\Omega)$ le norme:
- $$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p < \infty$$

$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \quad p = \infty$
 In particolare se $p=2$ scriviamo

$W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$ e introduciamo il prodotto scalare

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega$$

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \left((u, u)_{H^k(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Vali il seguente

Teorema

- $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)})$ è uno spazio di Banach $\forall p: 1 \leq p \leq +\infty$
- $W^{k,p}(\Omega)$ è riflessivo per $p: 1 < p < +\infty$
- $W^{k,p}(\Omega)$ è separabile per $p: 1 \leq p < +\infty$
- $H^k(\Omega)$ è Hilbert separabile

16) Osservazione Se una funzione

$u \in W^{1,p}(\Omega)$ ovvero $u \in W^{1,p}(\Omega)$,
con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio limitato, u ha delle
ulteriori proprietà di regolarità?

Ci si aspetterebbe che seppure non p
nessuna regolarità debba avere u .

Analogamente, se prendiamo $u \in W^{k,p}(\Omega)$
più grande è k , maggiore regolarità.

Ci si aspetta su u .

Domanda: c'è un legame tra la
regolarità di u ed n ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$)?

Ci si aspetta che al crescere di n aumentino i problemi per
la risposta a tutte queste domande ^{avere regolarità?}

è data da una serie di risultati

che hanno sotto il nome di

Teoremi di immersione di Sobolev

Ne esistono varie versioni, a

secondo di come è fatto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ^{dominio limitato aperto connesso}

Noi ne enunciamo solo alcuni.

Gli ~~altri~~ ^{altri} possono essere recuperati
sui testi.

Teorema di immersione di Sobolev

(17)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio limitato di classe $C^{0,1}$.
(dominio lipschitziano)

(1) Se $kp < n$ allora

$$W^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*], \quad p^* = \frac{pn}{n-kp}$$

Inoltre si ha:

(i) $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}, \forall q \in [1, p^*]$

$\Rightarrow W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*]$ immersione continua

(ii) $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \forall q \in [1, p^*]$ immersione compatta

$(\forall \{v_n\} \subset W^{k,p} \text{ limitato} \Rightarrow$

$\exists v \in L^q : v_n \xrightarrow{L^q} v \text{ forte}, \forall q \in [1, p^*])$

(2) Se $kp = n$ allora:

$$W^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \forall q \in [1, +\infty).$$

Inoltre si ha:

(i) $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \quad q \in [1, +\infty)$

$\Rightarrow W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), q \in [1, +\infty)$ immersione continua

(ii) $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), q \in [1, +\infty)$ immersione compatta

18) (3) Se $k_P > n$ allora

$$W^{k_P, P}(\Omega) \subset C^{\bar{J}}(\bar{\Omega}) \quad \text{dove } \bar{J} = \left[k - \frac{n}{P} \right]$$

Inoltre in $\bar{\Omega}$ (parte intera)

$$(i) \|u\|_{C^{\bar{J}}(\bar{\Omega})} \leq C \|u\|_{W^{k_P, P}(\Omega)}$$

$$\Rightarrow W^{k_P, P}(\Omega) \hookrightarrow C^{\bar{J}}(\bar{\Omega}) \quad \text{immersione continua}$$

$$(ii) W^{k_P, P}(\Omega) \hookrightarrow C^{\bar{J}}(\bar{\Omega}) \quad \text{immersione compatta}$$

Se $k - \frac{n}{P}$ non è intero, vale anche:

$$(iii) |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C |x-y|^\theta \|u\|_{W^{k_P, P}(\Omega)}$$

$$\text{con } x, y \in \bar{\Omega}, |\alpha| = \bar{J} \quad \text{e} \quad \theta = \left(k - \frac{n}{P} \right) - \bar{J} \quad (0 < \theta < 1)$$

$$\Rightarrow W^{k_P, P}(\Omega) \hookrightarrow C^{\bar{J}, \theta}(\bar{\Omega}) \quad \text{immersione continua}$$

$$W^{k_P, P}(\Omega) \hookrightarrow C^{\bar{J}, \theta}(\bar{\Omega}), \quad \forall \theta < \theta, \quad \text{immersione compatta.}$$

$(C^{\bar{J}, \theta}(\bar{\Omega}))$: funzioni f volte differenziabili in $\bar{\Omega}$
con derivate di ordine $\bar{J}$ θ -Hölderiane)

Dimostrazione la proposizione (3) implica

che se $u \in W^{k_P, P}(\Omega)$ con $k_P > n$, allora

$$u = \tilde{u} \in C^{\bar{J}}(\bar{\Omega}) \quad \text{q.o.!!} \quad \text{Ricordare}$$

$$\text{l'esempio: } z(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad -1 < x < 1$$

$$z' = 0 \quad \Rightarrow z \in W^{1, P}(-1, 1) \quad \forall P \geq 1 \quad \text{ma } z \notin C(-1, 1)$$

$$\begin{matrix} k_P > n \\ P > 1 \end{matrix} \quad \forall P > 1$$

Paiche molti dei problemi per EDP

- che vedremo sono ambientati in $W^{k,2} = H^k$ vedremo cosa succede in alcuni casi particolari

- $n=1$: $H^1(I) = W^{1,2}(I)$ I intervallo di $\mathbb{R}$ limitato

$$1 \cdot 2 = 2 > 1$$

$$k \cdot p \geq n$$

$$\text{se } v \in H^1(I) \Rightarrow v \in C^0(I)$$

Quanto $[k - \frac{n}{p}] = [1 - \frac{1}{2}] = [\frac{1}{2}] = 0$ quindi non ha
[però $v \in C^{0, \frac{1}{2}}(I)$] nessuna regolarità sulle derivate

- $n=2$ $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dominio limitato, di classe $C^{0,1}$
(ovvero con $\partial\Omega$ lipschitziana).

$$1 \cdot 2 = 2 = 2$$

$$k \cdot p$$

$$= n$$

$$\text{se } v \in W^{1,2}(\Omega) \Rightarrow v \in L^p(\Omega)$$

$$p \in [1, +\infty)$$

però non è detto che v sia limitata

Esempio: (Esempio:) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$

$$u(x) = [-\lg \|x\|]^{\frac{1}{4}} = [-\lg \sqrt{x_1^2 + x_2^2}]^{\frac{1}{4}} =$$

$$= [-\frac{1}{2} \lg(x_1^2 + x_2^2)]^{\frac{1}{4}} \quad (\text{definite q.o. su } \Omega)$$

Si può provare che $u \in W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$

ma chiaramente u non è limitato in $\Omega(0)$.

$$20) \int_{\Omega} u^2(x) dx = \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} [-\log \rho]^{\frac{1}{2}} d\theta =$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2\pi \int_0^1 \rho (-\log \rho)^{\frac{1}{2}} d\rho \quad \text{OK,}$$

limitata in $V(0)$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2} \log(x_1^2 + x_2^2) \right]^{-\frac{3}{4}} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} 2x_i$$

$$= \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2} \log(x_1^2 + x_2^2) \right]^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{-x_i}{x_1^2 + x_2^2} \right)$$

$$\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right]^2 dx = C \int_0^1 \rho \frac{1}{16} \left[-\frac{1}{2} \log \rho^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \frac{\rho^2}{\rho^4} d\rho$$

$$= C \int_0^1 \frac{1}{\rho} \frac{1}{[-\log \rho]^{\frac{3}{2}}} d\rho$$

$$V(0) : \frac{1}{\rho} \frac{1}{[-\log \rho]^{\frac{3}{2}}} \in L^1(V(0)) \quad \text{OK.}$$

Quindi: $u \in W^{1,2}(\Omega)$

• $m=3$ $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ dominio limitato
 (non come C^0 !)

$$1.2 = 2 < 3$$

$k \cdot p \quad \quad \quad \quad \quad m$

$$\text{se } v \in H^1(\Omega) \Rightarrow v \in L^p$$

$$\forall p \in [1, p^*]$$

$$\text{con } p^* = \frac{6}{3-2} = 6$$

$$v \in L^6(\Omega)$$

è la massima regolarità

immersione continua
 (immersione non compatta
 $(H^1(\Omega) \hookrightarrow C_0 \hookrightarrow L^p, p \in [1, 6))$)

$$p^* = \frac{pm}{n-kp} = \frac{2 \cdot 3}{3-1 \cdot 2} = \frac{6}{3-2} = 6$$

Esercizio: Studiare regolarità di

- $\circ \quad v \in H^2(\Omega) \quad i) \Omega \subset \mathbb{R} \quad ii) \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad iii) \Omega \subset \mathbb{R}^3$
 con Ω ^{dominio} limitato di classe $C^{0,1}$

~~XXXXXXXXXX~~

~~XXXXXXXXXX~~

Lemma Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio limitato di classe $C^{0,1}$ (lipschitziano).

Sia $\{u_k\}$ una successione limitata in $H^1(\Omega)$. Allora $\exists$ una sottosuccessione $\{u_{k_j}\}$ e un elemento $u \in H^1(\Omega)$:

(1) $u_{k_j} \rightarrow u$ in $L^2(\Omega)$ (convergenza forte)

(2) $u_{k_j} \rightharpoonup u$ in $H^1(\Omega)$ (convergenza debole)

- la (1) è conseguenza dei teoremi di immersione Sobolev
- la (2) è conseguenza del fatto che H^1 è un Hilbert $\Rightarrow$ è riflettivo

Osservazione Le Hp. su Ω si possono indebolire (nei teoremi di immersione). Noi non tratteremo questi casi.

Osservazione $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ^{$\forall n$} Si deduce da teoremi di immersione Sobolev

$m=1$	$2 > 1, \quad kp > n$	$m=2$	$2=2, \quad m \geq 3$	$2 < n$
			$kp = m$	$kp < m$

ma $p^* = \frac{2n}{n-2} > 2 \Rightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$
 $p^* = \frac{pn}{n-kp}$

~~Inoltre $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$
 e $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$
 e $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$~~

~~imm. comp. $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$
 imm. contin. $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$~~

21bis

Diamo ora alcuni risultati di densità. Ricordiamo che

$C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$, per $1 \leq p < +\infty$.

- Domanda: $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $W^{1,p}(\Omega)$?
o, più in generale, $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $W^{k,p}(\Omega)$?

La risposta a questa domanda è:

non sempre. In particolare la densità o meno di $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$

- dipende da come è fatto Ω .

Prima di enunciare i risultati

vogliamo però dare una motivazione del perché sia importante

conoscere la densità di insieme di funzioni molto regolari (C^∞)

- negli spazi $W^{k,p}$, in particolare in $W^{k,p}(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio limitato.

22) I problemi di EDP che tratteremo sono problemi ai valori iniziali e al contorno su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitato -

Poiché tali problemi verranno ambientati in spazi di Sobolev, ad esempio

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega), \text{ dobbiamo chiederci}$$

che senso ha la restrizione al $\partial\Omega = \Gamma$ (traccia) di una funzione $u \in H^1(\Omega)$,

ovvero di una funzione: $u, u' \in L^2(\Omega)$.

Si tenga conto che $\partial\Omega$ ha misura nulla rispetto alla misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ ($> \Omega$) e che le funzioni di $L^2(\Omega)$ sono definite q.o.!! (Ricordare esempio iniziale)

Una possibile soluzione a questo problema consiste nell'affinmare le funzioni di $H^1(\Omega)$ con funzioni regolari, per le quali la nozione di traccia su $\partial\Omega$ è ben definita, e poi nel provare dei risultati di passaggio al limite sulle

successioni e prossimi momenti che permettano di estendere la nozione di traccia a tutte le funzioni di $H^1(\Omega)$.

Valgono i seguenti risultati: (23)

Teorema $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p: 1 \leq p < \infty$.

Teorema $C_c^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ è denso in $W^{k,p}(\Omega)$ $\forall 1 \leq p < \infty$.

Teorema Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio limitato diciamo $C^{k-1,1}$. Allora $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ è denso in $W^{k,p}(\Omega)$, $\forall p: 1 \leq p < \infty$.

Attenzione!! In generale $C_c^\infty(\Omega)$ non è denso in $W^{k,p}(\Omega)$, ovvero vale

$$\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}} \subsetneq W^{k,p}(\Omega)$$

(sempre per $1 \leq p < \infty$)

Diciamo quindi la seguente definizione

Definizione la chiusura di $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) è lo spazio $W_0^{k,p}(\Omega)$.

• $W_0^{k,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach rispetto alla $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ indotta da $W^{k,p}(\Omega)$.

• $W_0^{k,p}(\Omega)$ è separabile per $1 \leq p < \infty$

• $W_0^{k,p}(\Omega)$ è riflessivo per $1 < p < \infty$

24) Vediamo ora nel dettaglio il caso $p=2$,
ovvero $W^{k,2} = H^k$.

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sovveremo:

$$C_c^\infty(\Omega) \text{ u. } \|\cdot\|_{H^k(\Omega)} = H_0^k(\Omega)$$

Si può provare che $H_0^k(\Omega)$ è uno
spazio di Hilbert con la norma indotta
da $H^k(\Omega)$ - Inoltre vale:

Teorema Sia $u \in H^1(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio
limitato di classe $C^{0,1}$. Allora:

$$u \in H_0^1(\Omega) \iff u=0 \text{ su } \partial\Omega$$

osservazione: u non è detto che
sia continua, e neanche definita ovunque.
Però $u|_{\partial\Omega} = 0$ q.o. rispetto alle
misure di Lebesgue su $\partial\Omega$!!

Teorema Sia $u \in H^k(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
dominio limitato di classe $C^{k-1,1}$ allora

$$u \in H_0^k(\Omega) \iff \partial^\alpha u = 0 \text{ su } \partial\Omega, \\ \forall \alpha \text{ m.o. tale che} \\ 0 \leq |\alpha| \leq k-1.$$

Teorema $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ($\forall n$) (Ω dominio
di classe $C^{0,1}$)
 ~~$H_0^1(\Omega)$ denso in $L^2(\Omega)$~~

basterebbe ora a definire gli

spazi duali di $H_0^1(\Omega)$ e di $H_0^k(\Omega)$

Definizione: $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$ dove

$$\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup \{ |\langle F, v \rangle| : v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1 \}$$

Osservazione: Poiché si ha

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \Rightarrow (L^2(\Omega))' \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

Quindi identificando $L^2(\Omega)$ con $(L^2(\Omega))'$ abbiamo le inclusioni:

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \quad \left(\begin{array}{l} \text{immersioni} \\ \text{continue} \end{array} \right)$$

Questa viene chiamata triade hilbertiana.

Attenzione! Non si possono identificare H_0^1 e H^{-1} !!

Triade hilbertiana (caso generale)

Siano V e H due spazi di Hilbert:

- (i) $V \subset H$ V sottospazio di H
- (ii) V è denso in H
- (iii) $V \hookrightarrow H$ V è immerso con continuità in H
- (iv) V è separabile.

$\Rightarrow H$ e V' separabili

$\Rightarrow H = H' \subset V'$ $\Rightarrow (V, H, V')$ triade hilbertiana

Esempio

$$H_0^1 \subset L^2 \subset H^{-1}$$
$$H^1 \subset L^2 \subset (H^1)'$$

Ω dominio di classe C^1

Vale il seguente teorema che caratterizza gli elementi di $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$

Teorema: Sia $F \in H^{-1}(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Allora esistono $f_0 \in L^2(\Omega)$; $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$:

(*) $F = f_0 + \operatorname{div} f \quad (\langle F, v \rangle = \int_{\Omega} f_0 v - \int_{\Omega} f \cdot \nabla v, \forall v \in H_0^1(\Omega))$

~~$\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} = \inf_{f_0, f} \left(\int_{\Omega} f_0^2 + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i^2 \right)^{1/2}$~~

$\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} = \max_{0 \leq i \leq n} \|f_i\|_{L^2(\Omega)}$
 Inoltre se Ω è limitato in più si ha $f_0 = 0$.

(*) $\operatorname{div} f$: derivate distribuzionali

20) Osservazione: Gli elementi del duale di $H_0^1(\Omega)$ sono rappresentati da funzioni di $L^2(\Omega)$ e da derivate prime (nel senso delle distribuzioni) di funzioni in $L^2(\Omega)$.
 La notazione H^{-1} sta quindi ad indicare che si è "consumata" una derivata a causa dell'operatore di divergenza.

Periamo generalizzare la definizione precedente ad altri casi:

Definizione: $H^{-k}(\Omega) = (H_0^k(\Omega))'$

Definizione: $W^{-1,p'}(\Omega) = (W_0^{1,p}(\Omega))'$

per $1 \leq p < \infty$ con p' esponente coniugato di p , ovvero $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$.

Torniamo ora agli spazi $H_0^1(\Omega)$, o, più in generale, a $H_0^k(\Omega)$.

Abbiamo visto che sono costituiti da funzioni di $H^1(\Omega)$ (o $H^k(\Omega)$) con traccia nulla al bordo (vale a dire fino alle derivate di ordine $k-1$).

Ci chiediamo se la nozione di traccia si possa estendere anche a funzioni di $H^k(\Omega)$, o di $H^k(\Omega)$.
 La risposta è affermativa purché di fare delle ipotesi di regolarità su Ω e di introdurre gli spazi di Sobolev frazionari. (27)

Definizione:

• Sia $0 < \theta < 1$:

$$H^\theta(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\theta + \frac{n}{2}}} \in L^2(\Omega \times \Omega) \right\}$$

munito della norma naturale

• Sia $s = k + \theta$ con $k \in \mathbb{N}$, $0 < \theta < 1$

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in H^k(\Omega) : D^\alpha u \in H^\theta(\Omega), \forall \alpha: |\alpha| = k \right\}$$

munito della norma naturale

Definizione: Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio limitato di classe $C^{k,1}$

Allora utilizzando le carte locali (diffeomorfismo Φ) si possono definire gli spazi di Sobolev frazionari sulla varietà regolare $\Gamma = \partial\Omega$, $H^\theta(\Gamma)$ e $H^s(\Gamma)$ con $0 < \theta < 1$, $s = k + \theta$, $k \in \mathbb{N}$

Teorema: • $H^s(\Omega)$ e $H^s(\Gamma)$ sono spazi di Hilbert

• $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$ immersione continua.

↳ Anche per gli $H^s(\Omega)$ e $H^s(\Gamma)$ valgono i teo di immersione di Sobolev !!

N.B.

28) Portiamo a questo punto enunciare i seguenti risultati: (non ottergono perdurano!!)

Teorema: Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω dominio limitato di classe $C^{0,1}$ (lipschitziano), $\Gamma = \partial\Omega$. Allora esiste un operatore lineare limitato (operatore di traccia) $\gamma_0: H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$:

- $\gamma_0 u = u|_{\Gamma} \quad \forall u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.
- $\|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \|u|_{\Gamma}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega)$
- $\gamma_0: u \mapsto u|_{\Gamma}$ è suriettivo (da $H^1(\Omega)$ a $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$)
- il nucleo di γ_0 è $H_0^1(\Omega)$, ovvero

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega): \gamma_0 u = u|_{\Gamma} = 0\}$$

- vale la formula di Green:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v = \int_{\Gamma} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) n_i d\sigma - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

$\underline{n}$: normale esterna a Γ

misura di Lebesgue su Γ

$$\forall u, v \in H^1(\Omega)$$

N.B l'integrale di superficie ha senso perché $\gamma_0 u$ e $\gamma_0 v \in L^2(\Gamma)$

($L^2(\Gamma)$ è un'algebra // Disug. Hölder)

Osservazione Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dominio limitato di classe C^0 . (29)

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \{u|_{\Gamma} : u \in H^1(\Omega)\}$$

Quindi le tracce di funzioni di $H^1(\Omega)$ sono funzioni che possiedono $\frac{1}{2}$ derivata in $L^2(\Gamma)$.

È come se nell'operazione di restrizione una funzione di $H^1(\Omega)$ perdesse una sua derivata. Ricordiamo infatti che:

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \left\{ u \in L^2(\Gamma) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{1}{2} + \frac{n}{2}}} \in L^2(\Gamma \times \Gamma) \right\}$$

$\frac{1}{2}!! \uparrow \uparrow$ fino

Teorema Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω dominio limitato di classe C^{k+1} (con $k \geq 2$), $\Gamma = \partial\Omega$. Allora esiste un operatore lineare limitato:

$$\gamma: H^k(\Omega) \mapsto (H^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{k-\frac{3}{2}}(\Gamma), \dots, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)):$$

$$\bullet \gamma u = \left(u|_{\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma}, \dots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial n^{k-1}}|_{\Gamma} \right) \quad \forall u \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

$$\bullet \|\gamma u\|_{(H^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma), \dots, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} \leq C \|u\|_{H^k(\Omega)} \quad \forall u \in H^k(\Omega)$$

• il nucleo di γ è $H_0^k(\Omega)$.

• Vale la formula di Green per $u, v \in H^2(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \Delta u \, v = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, dS - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad \forall u, v \in H^2(\Omega)$$

$$(u \in H^2(\Omega) \Rightarrow (u|_{\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma}) \in (H^{\frac{3}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))).$$

30) Vogliamo ora enunciare alcuni risultati in cui è possibile controllare la $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ con $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$. Questi risultati vanno sotto il nome di Disuguaglianze di Poincaré molto utili nelle stime $\circ$ di problemi per PDE

Teorema: Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dominio limitato di classe $C^{0,1}$ (lipschitziano). Supponiamo che u soddisfi una delle seguenti ipotesi:

(1) $u \in H_0^1(\Omega)$

(2) $u \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) : u|_{\tilde{\Gamma}} = 0 \text{ su un aperto } \tilde{\Gamma} \subset \Gamma = \partial\Omega, \text{ aperto rispetto alla topologia di } \partial\Omega \}$

(3) $u \in H^1(\Omega)$ e $u = 0$ su una insieme $S \subset \Omega$ con misura di Lebesgue $|S| = a > 0$

(4) $u \in H^1(\Omega)$ e $\int_{\Omega} u = 0$ (u ha media nulla in Ω)

Allora esiste una costante $C_P = C_P(n, \Omega)$ tale che:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad (*)$$

o $\forall x \quad u(x) = \int_a^x u'(t) dt + u(a) \quad x \in [a, b]$
 $\boxed{\text{se } u(a) = 0} \Rightarrow u(x) = \int_a^x u'(t) dt \Rightarrow$

$$\sup_{x \in [a, b]} |u(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |u'(x)| \cdot [b-a]$$

$$\boxed{u \in W^{1,1}(a, b) \subset C^0([a, b])}$$

Osservazione la stima (*) non può

valere in generale poiché ad esempio non è vero nel caso $n = \text{costante} \neq 0$.
Ecco perché in tutte le ipotesi (1)-(3)-(4), si richiede sostanzialmente che n abbia "abbastanza zeri", in modo da escludere le costanti $\neq 0$.

Corollario Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio limitato di classe C^1 . Sia $u \in H^1(\Omega)$.

Poniamo $\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u = \bar{u}$ (media di u su Ω)

Allora:

$$\|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Come ultima serie di risultati valgliamo fornire alcune stime dette di "interpolazione".

Ve ne sono numerose. Noi abbiamo fatto una selezione di quelle più usate.

Interpolare: Stimare una norma intermedia con una più "forte" e una più "debole".

32) Disuguaglianze di interpolazione

(1) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dominio limitato di classe C^2 . Allora se $u \in H^2(\Omega)$ si ha

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$$

$$(H^2(\Omega) \subset \underline{H^1(\Omega)} \subset L^2(\Omega))$$

(2) Disuguaglianze di Gagliardo-Nirenberg

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dominio limitato di classe C^1 . Allora:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-a} \|u\|_{W^{1,m}(\Omega)}^a$$

$$\forall u \in W^{1,m}(\Omega), \quad a = 1 - \frac{q}{p}, \quad 1 \leq q \leq p < +\infty$$

ad esempio se $p=4$ e $q=2$

$$\text{e } m \geq 2 \Rightarrow W^{1,m}(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$$

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$$

~~$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$$~~

$$H^1(\Omega) \subset \underline{L^4(\Omega)} \subset L^2(\Omega)$$

Esercizio: Provare che $(\Omega \subset \mathbb{R}^n, \text{ dominio limitato di classe } C^1)$

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}} \|u\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{3}{4}}$$