Studio Qualitativo di Funzione

Reperire un certo numero di informazioni per descrivere a livello qualitativo l'andamento del grafico di una funzione f

1. campo di esistenza (cioè, l'insieme di definizione)
2. segno: per quali x si ha $f(x) \geq 0$?
3. intersezioni con gli assi: $(0, f(0))$; per quali x si ha $f(x) = 0$
4. comportamento agli estremi del campo di esistenza
5. continuità
6. monotonia
7. massimi e minimi
8. grafico qualitativo

Campo di Esistenza

Il campo di esistenza è l'insieme di tutti i punti nei quali la funzione è definita.

Nel caso di una funzione composta si determina, caso per caso, tenendo conto degli insiemi di definizione delle funzioni base con le quali la funzione è stata costruita.

Esempio: data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{\ln(4 - x^2)}$

- il logaritmo è definito per

$$4 - x^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (-2, 2)$$

- il denominatore deve essere diverso da zero

$$\ln(4 - x^2) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; 4 - x^2 \neq 1 \;\Leftrightarrow\; x \neq \pm\sqrt{3}$$

Il campo di esistenza di f è $(-2, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$.

Comportamento agli Estremi

Se il campo di esistenza D è costituito dall'unione di più intervalli (limitati o illimitati), occorre prendere in considerazione separatamente gli estremi di ognuno di questi intervalli.

- Se gli estremi appartengono a D, si calcola semplicemente il valore della funzione in tali punti.

  Esempi: $f(x) = \sqrt{x}, \quad D = [0, +\infty), \quad f(0) = \sqrt{0} = 0$

  $f(x) = \sqrt{x(1-x)}, \quad D = [0, 1], \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 0$

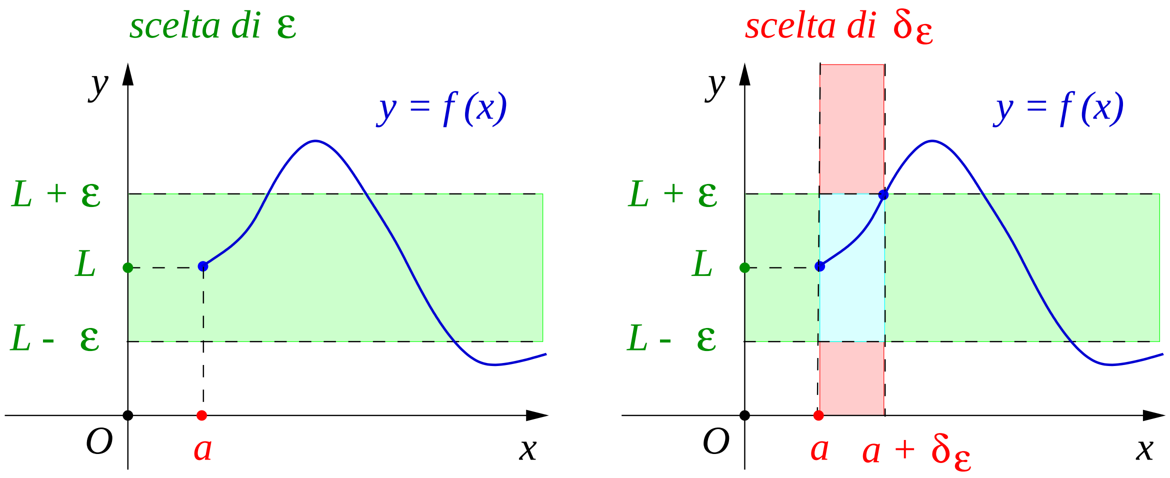
- Se gli estremi non appartengono a D, si introduce il concetto di limite.

  Esempio: $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

  Vogliamo calcolare $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}$

Limite Destro Finito

Quando la variabile x assume valori "vicini" ad a (e maggiori di a), i corrispondenti valori di $f(x)$ si avvicinano sempre più al valore L.



limite destro finito

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

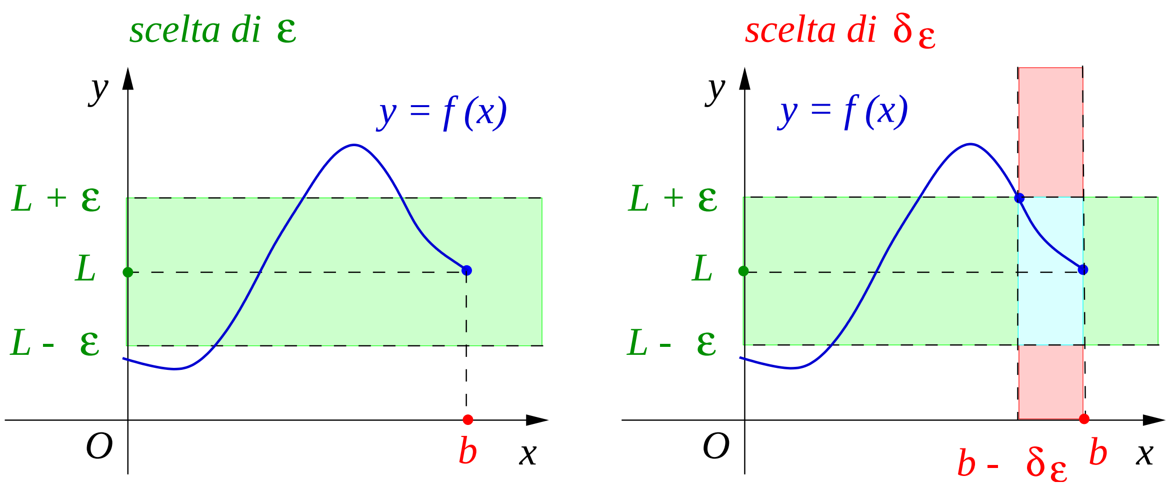
Si dice che $f(x)$ tende al limite L per x che tende ad a da destra se:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in (a, a + \delta_\varepsilon)$.

Esempi: (1) $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} = 0\,,$ (2) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1\,.$

Limite Sinistro Finito

Quando la variabile x assume valori “vicini” a b (e minori di b), i corrispondenti valori di $f(x)$ si avvicinano sempre più al valore L.



limite sinistro finito

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = L$$

Si dice che $f(x)$ tende al limite L per x che tende a b da sinistra se:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in (b - \delta_\varepsilon, b)$.

Esempi: (1) $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} = 0\,,$ (2) $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1\,.$

Limite Finito per $x \to x_0$

Se la funzione possiede sia il limite destro che il limite sinistro nel punto x_0 e se entrambi sono uguali al valore L, si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \textbf{(limite finito)}$$

Quando la variabile x assume valori "vicini" a x_0 (diversi da x_0), i corrispondenti valori di $f(x)$ sono "vicini" al valore L.

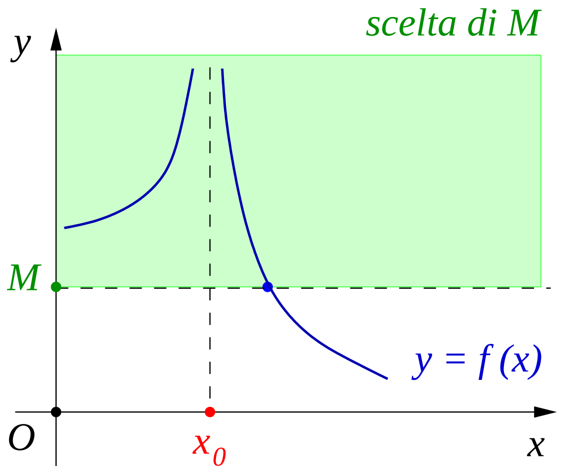
Si dice che $f(x)$ tende al limite L per x che tende ad x_0 se:

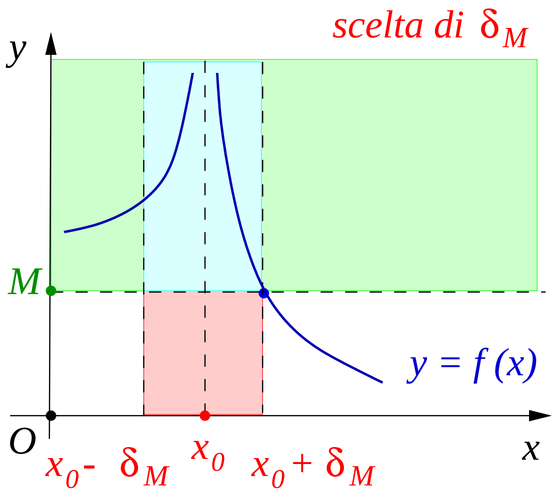
per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che
$|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon)$ con $x \neq x_0$.

Esempi: (1) $\lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3\,,$ (2) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

Limite Infinito

Quando la variabile x assume valori "vicini" ad x_0 (diversi da x_0), i corrispondenti valori di $f(x)$ crescono arbitrariamente.





limite infinito

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Si dice che $f(x)$ tende a $+\infty$ per x che tende ad x_0 se:

per ogni $M > 0$ esiste un $\delta_M > 0$ tale che
$f(x) > M$ per ogni $x \in (x_0 - \delta_M, x_0 + \delta_M)$ con $x \neq x_0$.

Esempio: $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Osservazioni sui Limiti per $x \to x_0$

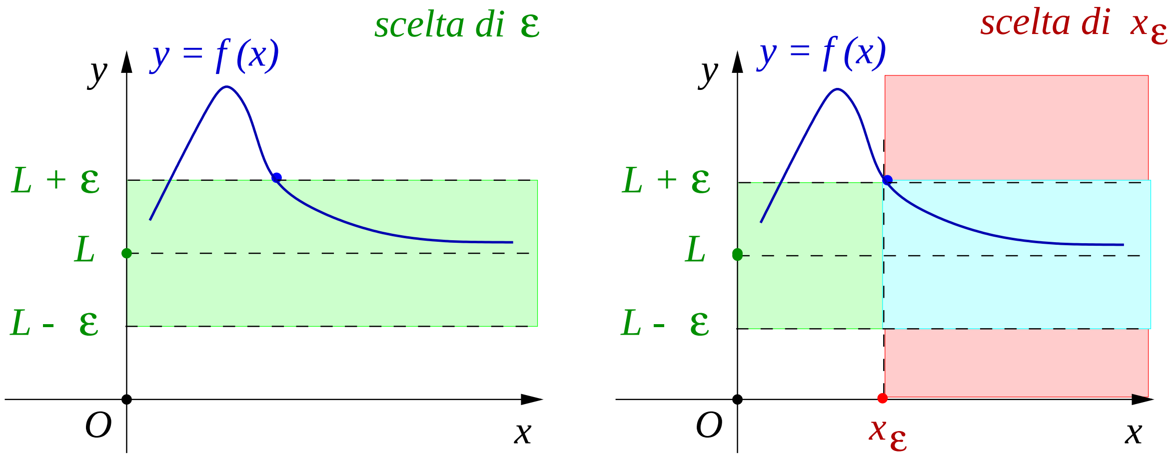
Poiché nella definizione di limite si richiede $x \neq x_0$, non ha alcuna importanza l'eventuale valore assunto dalla funzione nel punto x_0:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases} \qquad f(0) = 1\,, \text{ ma } \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases} \qquad g(0) = 0\,, \text{ ma } \lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$$

Limite Finito per $x \to +\infty$

Quando la variabile x cresce arbitrariamente, i corrispondenti valori di $f(x)$ sono sempre più “vicini” al valore L.



limite finito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Si dice che $f(x)$ tende al limite L per x che tende ad $+\infty$ se:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $x_\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in (x_\varepsilon, +\infty)$.

Esempi: (1) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1\,,$ (2) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0.$

Il Limite Può Non Esistere

Il limite di una funzione può non esistere:

- $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $x \neq 0$. Non esiste il limite per $x \to 0$.

  Infatti, il limite destro e limite sinistro esistono, ma sono diversi:

  $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1\,, \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1\,.$$

- $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Non esiste il limite per $x \to 0$.

  Infatti, i limiti destro e sinistro sono infiniti di segno opposto:

  $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty\,.$$

- $f(x) = \sin x$. Non esiste il limite per $x \to +\infty$.

Alcuni Limiti da Ricordare

- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$

- $\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

- $\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$ $\qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ 0 & \text{se } a > 1 \end{cases}$

- $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$

- $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ -\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$

Operazioni sui Limiti

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \beta \in \mathbb{R}$, allora si ha:

- somma: $\lim_{x\to x_0} \Big[f(x) + g(x)\Big] = \alpha + \beta$
- prodotto: $\lim_{x\to x_0} \Big[f(x) \cdot g(x)\Big] = \alpha \cdot \beta$
- quoziente: se $\beta \neq 0$, $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

Le stesse proprietà valgono nei casi $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ oppure $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$.

Operazioni sui Limiti

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, allora si ha:

- somma: $\lim_{x \to x_0} \Big[f(x) + g(x) \Big] = +\infty$

- prodotto: se $\alpha \neq 0$, $\lim_{x \to x_0} \Big[f(x) \cdot g(x) \Big] = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$

- quoziente: $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

  In particolare, si ha che $\lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = 0$

Le stesse proprietà valgono nei casi $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ oppure $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$.

Esercizio

Calcolare i seguenti limiti:

- $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} -2\left(3 + \frac{1}{x}\right) = -6$
- $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(2 - e^{-x}\right) = 2$
- $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - e^{-x}}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{2}{3}$
- $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(-1 + \frac{1}{x}\right)e^{x} = -\infty$
- $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{e^{x}} = 0$

Ampliamento di $\mathbb{R}$

Per $c \in \mathbb{R}$ definiamo le seguenti operazioni:

- $+\infty + c = +\infty\,, \qquad -\infty + c = -\infty$

  Questo significa che qualunque sia la funzione f che per $x \to x_0$ tende a $+\infty$, e qualunque sia la funzione g che per $x \to x_0$ tende a c, allora $f + g$ per $x \to x_0$ tende a $+\infty$. Analogamente per $-\infty$.

- $+\infty + \infty = +\infty\,, \qquad -\infty - \infty = -\infty$
- $(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty\,, \quad (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty\,, \quad (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$
- $\dfrac{c}{\pm\infty} = 0$
- se inoltre $c \neq 0$,

$$(+\infty)\cdot c = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases} \qquad (-\infty)\cdot c = \begin{cases} -\infty & \text{se } c > 0 \\ +\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

Operazioni sui Limiti

Il limite della somma, differenza, prodotto, quoziente di due funzioni risulta rispettivamente uguale alla somma, differenza, prodotto, quoziente (se il denominatore è diverso da zero) dei due limiti, purché non sia una delle forme indeterminate.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \beta \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, allora:

- somma: $\lim_{x \to x_0} \Big[f(x) + g(x)\Big] = \alpha + \beta$ (tranne nel caso $+\infty - \infty$)
- prodotto: $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \alpha \cdot \beta$ (tranne nel caso $\pm\infty \cdot 0$)
- quoziente: $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ $\Big($tranne nei casi $\dfrac{0}{0}$ e $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}\Big)$

Le stesse proprietà valgono nei casi $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ oppure $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$.

Forme Indeterminate

Restano indeterminate le operazioni:

$$+\infty - \infty\,, \quad 0 \cdot (\pm\infty)\,, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\,, \quad \frac{0}{0}$$

Cosa significa per esempio che $\dfrac{0}{0}$ è una forma indeterminata?

Significa che se $f(x)$ e $g(x)$ tendono a 0 per $x \to x_0$, da questa unica informazione NON si può dedurre qual è il comportamento di $\frac{f(x)}{g(x)}$ al tendere di x a x_0.

Esempio: consideriamo $f(x) = x$, $g(x) = x^3$, $h(x) = 2x$.

Si ha $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 0$.

Tuttavia, $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty\,, \quad \lim_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0\,, \quad \lim_{x\to 0} \dfrac{h(x)}{f(x)} = 2\,.$

Limite di un Polinomio all'Infinito

Il comportamento all'infinito di un polinomio è determinato dal termine di grado massimo.

Esempi:

$$\lim_{x\to+\infty}(2x^3-x+1)=\lim_{x\to+\infty}2x^3\cdot\left(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2x^3}\right)=\lim_{x\to+\infty}2x^3=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^4-2x^3+x^2)=\lim_{x\to-\infty}-x^4\cdot\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}-x^4=-\infty$$

Limite di una Funzione Razionale all'Infinito

Dati due polinomi di grado m e n

$$\begin{aligned} P(x) &= a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots a_1 x + a_0 \\ Q(x) &= b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n}$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n}$$

Esercizio

Calcolare i seguenti limiti:

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3+5x+3}{7x^3-x^2+11} = \frac{4}{7}$$
- $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+5x^2+3}{x^5-3x^4+2x^2} = 0$$
- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^7+10x-8}{x^2+3x+8} = +\infty$$
- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}+5e^x}{2e^{3x}-e^{2x}+4} = \frac{1}{2}$$

  (si può risolvere ponendo $t = e^x$)

Altri Limiti Fondamentali

- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ a > 1$
- $\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^n} = 0 \quad \forall\, p, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
- $\lim_{x\to 0^+} x^n (\ln x)^p = 0 \quad \forall\, p, n \in \mathbb{N} - \{0\}$

Esercizio. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to +\infty} x^5 2^x = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} x^9 \ln x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{t\to 0} 2 \cdot \frac{e^t - 1}{t} = 2 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\ln(x+1)}{x} \cdot \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

Funzioni Continue

Sia I un intervallo aperto e sia $x_0 \in I$. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice continua nel punto x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,,$$

cioè,

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)\,.$$

Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice continua nell'intervallo $[a,b]$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \;\; \forall\, x_0 \in (a,b),\;\; \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \text{ e } \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

Graficamente: una funzione definita su un intervallo è continua se è possibile disegnarne il grafico con un tratto *continuo*, senza staccare la penna dal foglio.

Funzioni Continue – Operazioni

Dalle proprietà delle operazioni sui limiti segue che la somma, il prodotto e il quoziente di funzioni continue sono funzioni continue.

Se f e g sono continue in x_0, si ha:

- $f+g$ è continua in x_0, cioè, $\lim_{x\to x_0}\Big[f(x)+g(x)\Big]=f(x_0)+g(x_0)$.
- $f\cdot g$ è continua in x_0, cioè, $\lim_{x\to x_0}\Big[f(x)g(x)\Big]=f(x_0)g(x_0)$.
- se g è diversa da zero vicino a x_0, $\dfrac{f}{g}$ è continua in x_0, cioè, $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

Funzione inversa: se f è continua e invertibile, allora anche la *funzione inversa* f^{-1} è continua.

Funzioni Continue – Esempi

Le seguenti funzioni sono continue nei rispettivi campi di esistenza:

1. la funzione valore assoluto $|x|$
2. le funzioni potenza ad esponente reale x^b
3. i polinomi $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$
4. le funzioni razionali (cioè, quozienti di due polinomi)
5. le funzioni esponenziali a^x e le loro inverse (le funzioni logaritmiche $\log_a x$)
6. le funzioni $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ e le loro inverse
7. ...

Esempio

Calcolare $\lim_{x \to 2} \dfrac{3x^3 + x^2 + 1}{x - 1}$.

La funzione $f(x) = \frac{3x^3+x^2+1}{x-1}$ è una funzione razionale fratta, quindi è continua in tutti i punti dove è definita, cioè in $\mathbb{R} - \{1\}$. Pertanto

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^3 + x^2 + 1}{x - 1} = \frac{3 \cdot 2^3 + 2^2 + 1}{2 - 1} = 29\,.$$

Attenzione: NON usare la regola dei termini di grado massimo! La regola vale solo per il limite di una funzione razionale fratta per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$!

Quanto vale invece $\lim_{x \to 1} \dfrac{3x^3 + x^2 + 1}{x - 1}$?

Limite di Funzione Composta

Siano f e g due funzioni per cui abbia senso $f \circ g$. Supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

e che f sia continua in L. Allora si ha che

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\Big(\lim_{x \to x_0} g(x)\Big).$$

Esempi: (1) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln\left(\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \ln 1 = 0$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{4x+1}{x}} = \sqrt{\lim_{x \to +\infty} \frac{4x+1}{x}} = \sqrt{4} = 2$

Continuità della Funzione Composta

Supponiamo che:

- g continua in x_0, cioè, $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$
- f continua in $y_0 = g(x_0)$, cioè, $\lim_{y \to y_0} f(y) = f(y_0)$

Allora $f \circ g$ è continua in x_0, cioè,

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)).$$

Esempi: le funzioni $f_1(x) = \sqrt[3]{7 + e^x}$, $f_2(x) = \log_{10}(9 + e^{1-x})$ sono continue dove sono definite. Pertanto, ad esempio,

$$\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{7 + e^x} = 2\,, \qquad \lim_{x \to 1} \log_{10}(9 + e^{1-x}) = 1$$

Esercizi sulle Funzioni Continue

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti funzioni sono continue in $\mathbb{R}$:

- $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{per } x \le 1 \\ |x| + 2 & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

- $$g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

- $$h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Determinare per quale valore del parametro k la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3x^3 + x + 2 - k & \text{per } x \leq 0 \\ \sqrt{x^4 + 1} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

è continua nel punto $x = 0$.

Esercizio 3. Determinare per quale valore del parametro k la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^5 - 3k & \text{per } x < 1 \\ 2k\, e^{x-1} & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

è continua nel punto $x = 1$.

Esempi di Discontinuità

Esempio 1. $\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 0, \qquad f(0) = 1.$$

Esempio 2. $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

Esempi di Discontinuità

Esempio 3. $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$$

Il Teorema di Weierstrass

Teorema di Weierstrass. Sia f una funzione definita e *continua* su un intervallo *chiuso* e *limitato* $[a, b]$. Allora esistono il massimo e il minimo assoluti di f in $[a, b]$.

Nota. Le ipotesi sono tutte essenziali per la validità del teorema:

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$ non ha minimo in $[-1, 1]$.
  Infatti, la funzione non è *continua*.

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$ non ha massimo in $(0, 1]$. Infatti, l'intervallo non è *chiuso*.

- $f(x) = e^x$ non ha minimo in $(-\infty, 0]$. Infatti, l'intervallo non è *limitato*.

Esercizio

Scrivere l'espressione esplicita di una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che siano verificate contemporaneamente le seguenti proprietà:

- $f(0) = 0$,
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$.