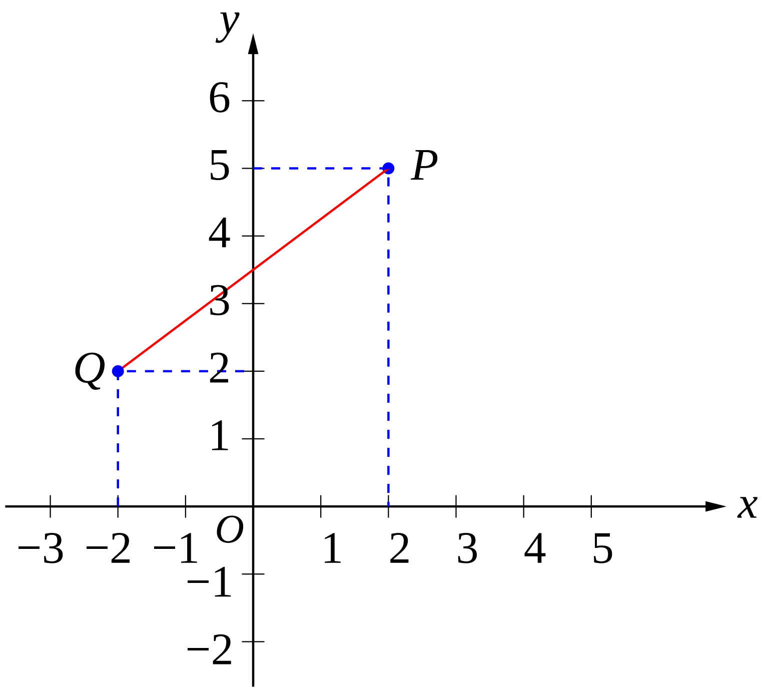
Coordinate Cartesiane nel Piano

$O = (0, 0)$ origine degli assi

x ascissa, y ordinata

sistemi monometrici: stessa unità di misura sui due assi x, y

sistemi dimetrici: unità di misura diverse sui due assi *(spesso utile nelle applicazioni)*



La distanza tra due punti $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ è data da

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Se il sistema è monometrico, $d(P, Q)$ è la lunghezza del segmento PQ.

Rette

Nel piano cartesiano ogni equazione di primo grado

$$a\,x + b\,y + c = 0$$

con a e b non contemporaneamente nulli, rappresenta una retta e viceversa ogni retta può essere descritta con un'equazione di questo tipo.

Due equazioni con coefficienti a, b, c proporzionali rappresentano la medesima retta, ad esempio:

$$2\,x + y + 5 = 0 \quad \text{e} \quad 4\,x + 2\,y + 10 = 0$$

Casi particolari:

Se $a = 0$: $\quad b\,y + c = 0$ descrive una retta *orizzontale*.

Se $b = 0$: $\quad a\,x + c = 0$ descrive una retta *verticale*.

Rette

Se $b \neq 0$ l'equazione della retta può essere riscritta, risolvendo rispetto ad y:

$$y = mx + q \quad \text{dove} \quad m = -\frac{a}{b}, \; q = -\frac{c}{b}$$

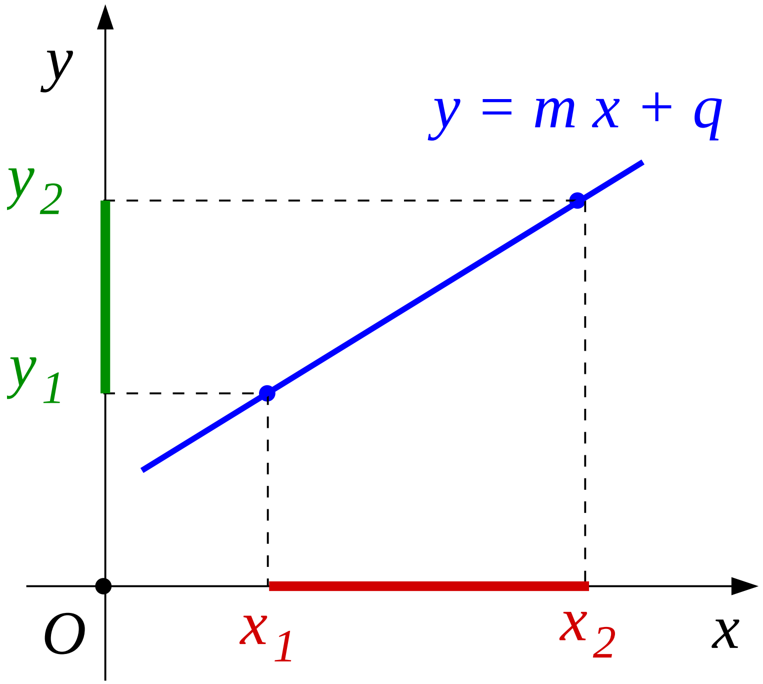
Il numero m si chiama coefficiente angolare e rappresenta la *pendenza*.
Il numero q si chiama intercetta e rappresenta l'ordinata del punto di intersezione con l'asse y.

Osservazioni:

- una retta (con $b \neq 0$) passa per l'origine se e solo se $q = 0$
- due rette di equazioni $y = mx + q$ e $y = m^*x + q^*$ sono *parallele* se e solo se $m^* = m$
- due rette di equazioni $y = mx + q$ e $y = m^*x + q^*$ sono *perpendicolari* se e solo se $m \cdot m^* = -1$

Rette

Il coefficiente angolare di una retta soddisfa la seguente relazione. Consideriamo due punti sulla retta (x_1, y_1) e (x_2, y_2) con $x_1 \neq x_2$. Si ha che:



$$y_1 = mx_1 + q$$

$$y_2 = mx_2 + q$$

Sottraendo membro a membro:

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Rette

Equazione di una retta passante per due punti: l'equazione della retta passante per due punti assegnati $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ può essere scritta

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad \text{oppure} \qquad y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

Attenzione: la prima formula vale solo se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$; la seconda formula vale solo se $x_1 \neq x_2$

Esercizi Rette

Esercizio 1.

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (5, -1)$ e $Q = (5, 2)$.

Esercizio 2.

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (3, 1)$ e $Q = (\sqrt{2}, 1)$.

Esercizio 3.

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (0, 1)$ e $Q = (-1, 2)$.

Esercizi Rette (Soluzioni)

Soluzione Esercizio 1: P e Q hanno la stessa ascissa 5. Si tratta quindi di una retta verticale di equazione $x = 5$.

Soluzione Esercizio 2: P e Q hanno la stessa ordinata 1. Si tratta quindi di una retta orizzontale di equazione $y = 1$.

Soluzione Esercizio 3: $$\frac{y-1}{2-1} = \frac{x-0}{-1-0} \quad \Rightarrow \quad y = -x + 1$$

Esercizi Rette

Esercizio 4.

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (-1, 2)$ con coefficiente angolare $m = 2$.

Esercizio 5.

Scrivere l'equazione della retta che interseca l'asse delle ascisse in $x = 5$ e l'asse delle ordinate in $y = -1$.

Esercizio 6.

Scrivere l'equazione della retta che interseca l'asse delle ordinate in $y = 5$, parallela alla retta $y = 3x - 7$.

Esercizi Rette (Soluzioni)

Soluzione Esercizio 4: $y = 2\,x + 4$

Soluzione Esercizio 5: $y = \dfrac{1}{5}\,x - 1$

Soluzione Esercizio 6: $y = 3x + 5$

Insiemi di Numeri

- $\mathbb{N} = \{0\,,\,1\,,\,2\,,\,3\,,\,\ldots\}$ insieme dei numeri naturali
- $\mathbb{Z} = \{\ldots\,,\,-3\,,\,-2\,,\,-1\,,\,0\,,\,1\,,\,2\,,\,\ldots\}$ insieme dei numeri interi
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{m}:\ n, m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0\right\}$ insieme dei numeri razionali
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{numeri irrazionali}\}$ insieme dei numeri reali

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Esempi di numeri irrazionali:
$\sqrt{2}\,,\ \pi\,,\ $ il numero di Nepero $e\,,\ \ \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \ldots$

Sottoinsiemi di Numeri Reali

Intervalli limitati $\quad a, b \in \mathbb{R}$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \; a \leq x \leq b\}$ intervallo chiuso

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \; a < x < b\}$ intervallo aperto

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \; a \leq x < b\}$ intervallo chiuso a sn e aperto a ds

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \; a < x \leq b\}$ intervallo chiuso a ds e aperto a sn

Intervalli illimitati $\quad a, b \in \mathbb{R}$

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \; x \geq a\} \qquad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : \; x \leq b\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \; x > a\} \qquad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : \; x < b\}$

$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \; x \geq 0\} \qquad \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$\mathbb{R}_- = (-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R} : \; x \leq 0\}$

Funzioni

Il concetto di funzione nasce da quello di corrispondenza fra grandezze. Tale corrispondenza può essere data in svariati modi:

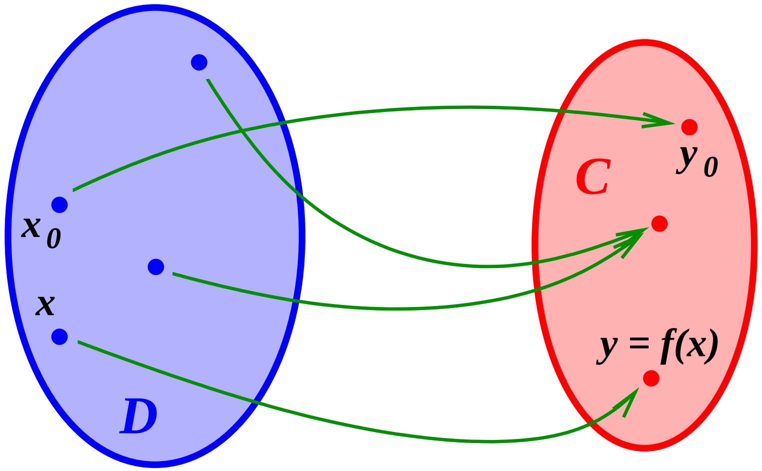
- da un rilevamento empirico
- da una formula (*legge*)

ESEMPI:

1. la temperatura in un certo luogo in un dato intervallo di tempo
2. la quotazione giornaliera del Dollaro in Euro in un dato periodo
3. lo spazio percorso nel tempo da un corpo in caduta libera: $s = \frac{1}{2} g\, t^2$ *(moto uniformemente accelerato)*
4. la relazione tra i lati x, y di un rettangolo di area unitaria: $xy = 1$ da cui si ricava: $y = \frac{1}{x}$

Funzioni – Definizione

Una funzione f è una legge che ad ogni elemento x di un certo insieme D (dominio) fa corrispondere *uno ed un solo* elemento y di un secondo insieme C (codominio). Si dice che y è l'immagine di x tramite f e si scrive $y = f(x)$.



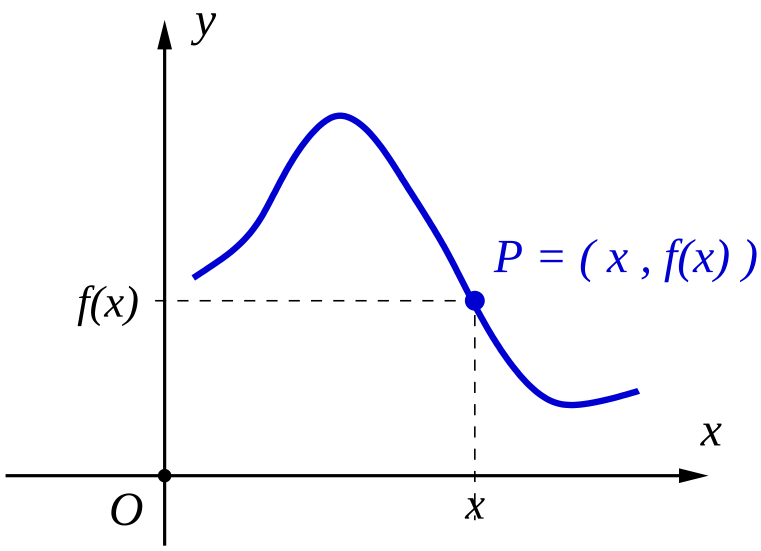
$$f : D \to C$$

$$f : x \mapsto y = f(x)$$

Grafico di una Funzione

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale.

Il grafico di f è l'insieme delle coppie $(x, f(x))$.



$$\text{Grafico di } f = \{(x, y) : x \in A,\ y = f(x)\}$$

Funzioni – Esempi

ESEMPI *(funzioni reali di una variabile reale)*:

1. $f(x) = 2x + 1 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$ retta
2. $f(x) = x^2 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$ parabola
3. $f(x) = \sqrt{x} \quad \forall\ x \geq 0$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$ iperbole equilatera
5. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$

Si dice che $f(x)$ è il valore della funzione f in x.
Nell'espressione $y = f(x)$, x è detta variabile *indipendente*, mentre y è detta variabile *dipendente*.

Esercizi sulle Funzioni

Esercizio 1. Calcolare il valore della funzione $f(x) = 2x - 5$ nei punti $x_1 = 1$ e $x_2 = -2$.

Soluzione: $f(1) = 2 \cdot 1 - 5 = -3, \qquad f(-2) = 2 \cdot (-2) - 5 = -9$

Esercizio 2. Calcolare il valore della funzione $f(x) = 2x^2 - 3x$ nel punto $x = 2$.

Soluzione: $f(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$

Esercizio 3. Calcolare il valore della funzione $f(x) = 3x - \frac{5}{x+1}$ nel punto $x = 4$.

Soluzione: $f(4) = 3 \cdot 4 - \frac{5}{4+1} = 11$

Funzioni Iniettive e Suriettive

- Una funzione $f : D \to C$ si dice iniettiva se elementi distinti di D hanno immagini distinte:

  $$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)$$

  o, equivalentemente:

  $$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$$

- Una funzione $f : D \to C$ si dice suriettiva se ogni elemento del *codominio* C è *immagine* di qualche elemento del *dominio*. In simboli:

  $$\forall\ y \in C \quad \exists\ x \in D : \quad f(x) = y$$

- Una funzione $f : D \to C$ contemporaneamente iniettiva e suriettiva si dice biunivoca

Funzioni Biunivoche

Una funzione $f : D \to C$ è BIUNIVOCA (biettiva) se

ogni $y \in C$ è *immagine* di *uno ed un solo* elemento $x \in D$.

ESEMPI:

1. $D = C = \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ è biunivoca: $y \in \mathbb{R}$ è immagine di $x = \frac{1}{2}(y-1)$.
2. $D = C = \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x}$ è biunivoca: $y \in \mathbb{R}_+$ è immagine di $x = y^2$.
3. $D = \mathbb{R}_-$, $C = \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ è biunivoca: $y \in \mathbb{R}_+$ è immagine di $x = -\sqrt{y}$.
4. $D = \mathbb{R}_+$, $C = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ non è biunivoca: $y < 0$ non è immagine di alcun x.
5. $D = \mathbb{R}$, $C = \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ non è biunivoca: $y = 4$ è immagine di $x = \pm 2$.

Operazioni sulle Funzioni

Date due funzioni f e g a valori reali, sull'intersezione dei due domini si possono definire:

- *funzione somma:* $s(x) = f(x) + g(x)$
- *funzione differenza:* $d(x) = f(x) - g(x)$
- *funzione prodotto:* $p(x) = f(x) \cdot g(x)$
- *funzione quoziente:* $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ per x tale che $g(x) \neq 0$

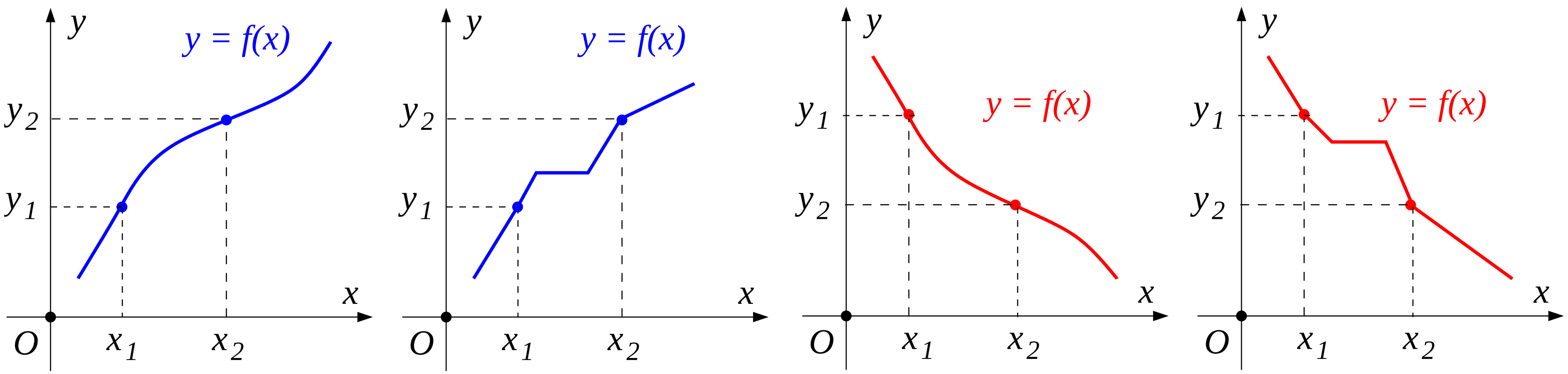
ESEMPI:

1. *somma:* $f(x) = x, \;\; g(x) = 5 \;\Rightarrow\; (f+g)(x) = x + 5$
2. *prodotto:* $f(x) = x, \;\; g(x) = x + 5 \;\Rightarrow\; (f \cdot g)(x) = x(x+5) = x^2 + 5x$
3. *quoziente:* $f(x) = x + 3, \;\; g(x) = x^2 - 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{x+3}{x^2-1}$ per $x \neq \pm 1$
4. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x - 5 \;\Rightarrow\; \dfrac{f-g}{h}(x) = \dfrac{\sqrt{x} - x^2}{x-5}$ Qual è il dominio?

Funzioni Monotone

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice

- strettamente crescente: $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$.
- debolmente crescente: $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$.
- strettamente decrescente: $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$.
- debolmente decrescente: $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$.



Esercizi sulle Funzioni Monotone

Esercizio 1. Dimostrare che la funzione $f(x) = 3\,x+1$ è strettamente crescente per $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione: per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$ si ha

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; 3\,x_1 < 3\,x_2 \;\Rightarrow\; 3\,x_1 + 1 < 3\,x_2 + 1 \quad \text{cioè } f(x_1) < f(x_2).$$

Ragionando in modo analogo, si dimostra che:

la funzione $f(x) = m\,x + q$ con $m > 0$ è strettamente crescente per $x \in \mathbb{R}$;

la funzione $f(x) = m\,x + q$ con $m < 0$ è strettamente decrescente per $x \in \mathbb{R}$.

Esercizi sulle Funzioni Monotone

Esercizio 2. Dimostrare che la funzione $f(x) = x^2$ è strettamente crescente per $x \geq 0$.

Soluzione: per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \geq 0$ con $x_1 < x_2$ abbiamo, in particolare, che

$$0 \leq x_1 < x_2.$$

Moltiplicando per x_1 (che è non negativo), si ottiene:

$$(x_1)^2 \leq x_1 x_2,$$

mentre moltiplicando per x_2 (che è strettamente positivo), si ottiene:

$$x_1 x_2 < (x_2)^2.$$

Ne segue che

$$(x_1)^2 \leq x_1 x_2 < (x_2)^2, \quad \text{cioè} \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Esercizi sulle Funzioni Monotone

Esercizio 3. Dimostrare che la funzione $f(x) = x^2$ è strettamente decrescente per $x \leq 0$.

Soluzione: per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \leq 0$ con $x_1 < x_2$ abbiamo, in particolare, che

$$x_1 < x_2 \leq 0.$$

Moltiplicando per x_1 (che è strettamente negativo), si ottiene:

$$(x_1)^2 > x_1 x_2,$$

mentre moltiplicando per x_2 (che è non positivo), si ottiene:

$$x_1 x_2 \geq (x_2)^2.$$

Ne segue che

$$(x_1)^2 > x_1 x_2 \geq (x_2)^2, \quad \text{cioè} \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Minimi Assoluti e Relativi di una Funzione

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in A$.

- minimo assoluto (o globale):

  x_0 è punto di minimo assoluto se $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in A$

- minimo relativo (o locale):

  si dice che in x_0 la funzione ha un punto di minimo relativo se "vicino" a x_0 assume solo valori *maggiori o uguali* di $f(x_0)$

  cioè

  x_0 è punto di minimo relativo se

  esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Massimi Assoluti e Relativi di una Funzione

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in A$.

- massimo assoluto (o globale):

  x_0 è punto di massimo assoluto se $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in A$

- massimo relativo (o locale):

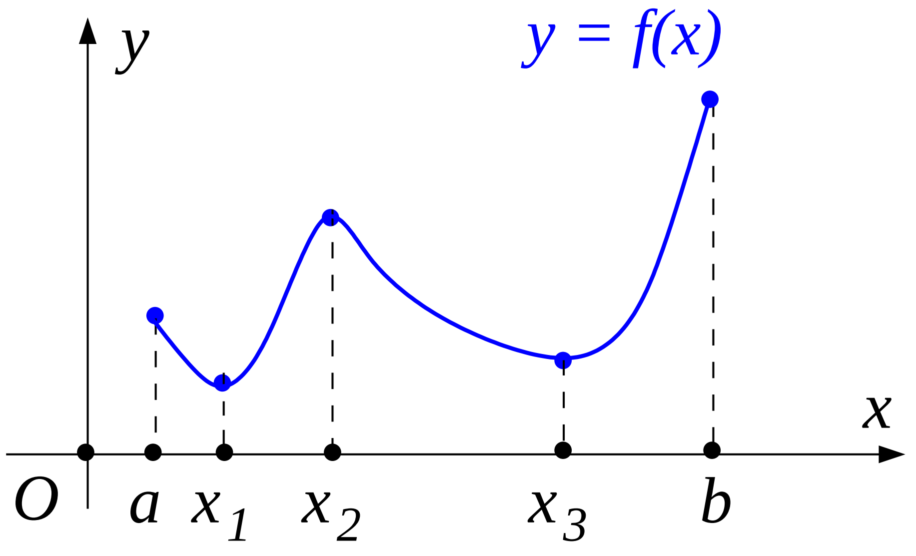
  si dice che in x_0 la funzione ha un punto di massimo relativo se "vicino" a x_0 assume solo valori *minori o uguali* di $f(x_0)$

  cioè

  x_0 è punto di massimo relativo se

  esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Minimi e Massimi di Funzione



- x_1 punto di minimo assoluto, $f(x_1)$ valore minimo assoluto;
- x_2 punto di massimo relativo, $f(x_2)$ valore massimo relativo;
- x_3 punto di minimo relativo, $f(x_3)$ valore minimo relativo;
- b punto di massimo assoluto, $f(b)$ valore massimo assoluto.

Esercizi su Massimi e Minimi

Esercizio 1. Trovare i punti di massimo assoluto, il valore massimo assoluto, i punti di minimo assoluto e il valore minimo assoluto della funzione $f(x) = 3\,x - 2$ nell'intervallo $[1, 2]$.

Esercizio 2. Trovare i punti di massimo assoluto, il valore massimo assoluto, i punti di minimo assoluto e il valore minimo assoluto della funzione $f(x) = -x^2$ nell'intervallo $[0, 5]$.

Esercizi su Massimi e Minimi (Soluzioni)

Soluzione Esercizio 1: la funzione ha come grafico una retta il cui coefficiente angolare è positivo e dunque è strettamente crescente. Quindi la funzione assume il massimo assoluto nel punto $x = 2$ e il valore del massimo è $f(2) = 4$, mentre la funzione assume il minimo assoluto nel punto $x = 1$ e il valore del minimo è $f(1) = 1$.

Soluzione Esercizio 2: la funzione in $[0, 5]$ è strettamente decrescente. Quindi la funzione assume il massimo assoluto nel punto $x = 0$ e il valore del massimo è 0, mentre la funzione assume il minimo assoluto nel punto $x = 5$ e il valore del minimo è -25.

Esercizi su Massimi e Minimi

Esercizio 3. Dire se la funzione $f(x) = x^2 + 1$ ha massimo assoluto su tutto $\mathbb{R}$. Dire se la stessa funzione ha minimo assoluto su $\mathbb{R}$.

Esercizio 4. Trovare i punti di massimo assoluto, il valore massimo assoluto, i punti di minimo assoluto e il valore minimo assoluto su $\mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x < -1 \\ -x + 2 & \text{per } -1 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

Esercizi su Massimi e Minimi (Soluzioni)

Soluzione Esercizio 3: la funzione non ha massimo assoluto; il minimo assoluto è assunto nel punto $x = 0$ e il suo valore è $f(0) = 1$.

Soluzione Esercizio 4: il massimo assoluto è assunto nel punto $x = -1$ e per $x > 2$, il valore del massimo è 3. Il minimo assoluto è assunto nel punto $x = 2$ e il valore del minimo è 0.

Funzione Composta

Date due funzioni $g : A \to B$ e $f : B \to C$ si può definire la funzione composta:

$$f \circ g : A \to C \qquad x \mapsto g(x) \mapsto f(g(x))$$

notazione funzionale $\qquad (f \circ g)(x) = f(g(x))$

Il campo di esistenza della funzione composta è costituito dai soli valori di x per i quali la composizione funzionale ha senso. La composizione ha senso se: x appartiene al dominio di g e il valore $g(x)$ appartiene al dominio di f.

Esempi:

- $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = x^2 - 4 \ \Rightarrow\ (f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ con $D = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
- $f(x) = \dfrac{1}{x},\ g(x) = x - 7 \ \Rightarrow\ (f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x - 7}$ con $D = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq 7\}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x},\ g(x) = x^2 + 1 \ \Rightarrow\ (f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ con $D = \mathbb{R}$

Esercizi sulla Funzione Composta

Esercizio 1. Date le funzioni $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 2x + 1$,

- dire quanto vale $f \circ g$ e qual è il suo insieme di definizione;
- dire quanto vale $g \circ f$ e qual è il suo insieme di definizione.

Esercizio 2. Date le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$,

- dire quanto vale $f \circ g$ e qual è il suo insieme di definizione;
- dire quanto vale $g \circ f$ e qual è il suo insieme di definizione.

Esercizi sulla Funzione Composta (Soluzioni)

Soluzione Esercizio 1:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{2x+1}$ definita per $x \geq -\frac{1}{2}$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2\sqrt{x} + 1$ definita per $x \geq 0$.

Soluzione Esercizio 2:

$(f \circ g)(x) = (x+1)^2$, $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$.

Entrambe le funzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

Funzione Inversa

Una funzione biunivoca è invertibile, cioè:

se $f : D \to C$ è biunivoca, possiamo definire la funzione inversa f^{-1}

$$f^{-1} : C \to D, \quad x = f^{-1}(y)$$

per ogni $y \in C$, x è l'unico punto di D tale che $f(x) = y$

Un tale x esiste ed è unico perché la funzione f è biunivoca.

Esempi

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f(x) = 2x + 1$
  $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y - 1)$

- $f : (-\infty, 0] \to [0, +\infty), \ \ f(x) = x^2$
  $f^{-1} : [0, +\infty) \to (-\infty, 0], \ \ f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$

Proprietà della Funzione Inversa

Sia $f : D \to C$ invertibile e sia $f^{-1} : C \to D$ la sua funzione inversa.

Consideriamo la funzione composta $f^{-1} \circ f$:

$$f^{-1} \circ f : \ x \in D \ \mapsto \ f(x) \in C \ \mapsto \ f^{-1}\big(f(x)\big) = x \in D$$

In altre parole, $f^{-1} \circ f : D \to D$, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ è la *funzione identità* su D.

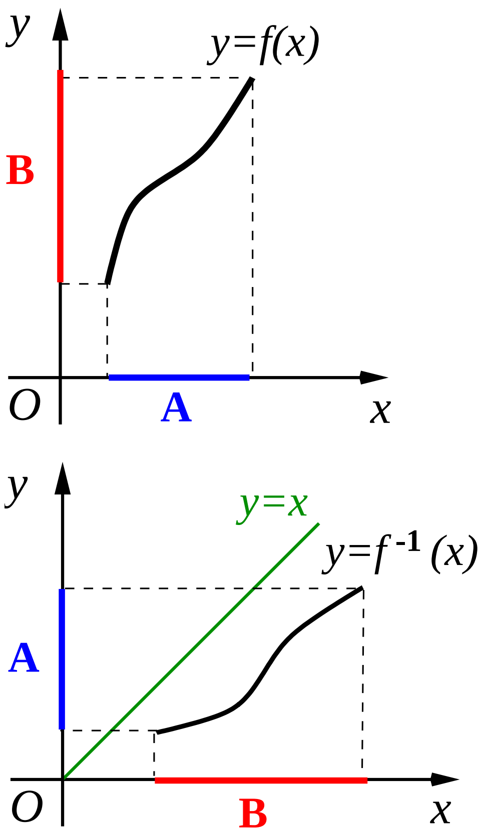
Analoga proprietà vale per $f \circ f^{-1}$:

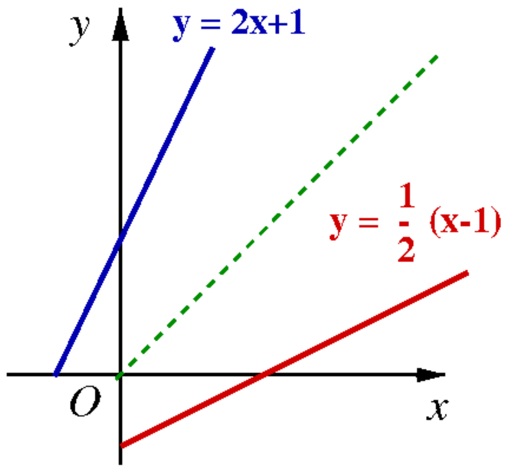
$$f \circ f^{-1} : \ y \in C \ \mapsto \ f^{-1}(y) \in D \ \mapsto \ f\big(f^{-1}(y)\big) = y \in C$$

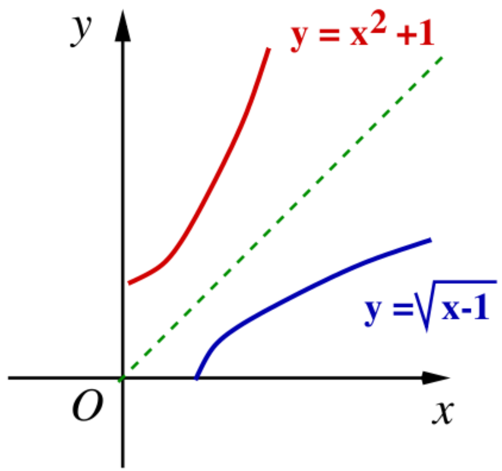
In altre parole, $f \circ f^{-1} : C \to C$, $(f \circ f^{-1})(y) = y$ è la *funzione identità* su C.

Grafico della Funzione Inversa

Il grafico di f^{-1} si ottiene per simmetria rispetto alla retta $y = x$.







Ancora sulla Funzione Inversa

Attenzione: non confondere la funzione inversa f^{-1} con la funzione reciproco $\dfrac{1}{f}$!!!

Esempio 1. Consideriamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$.

La funzione inversa è $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{3}$.

La funzione reciproco è $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{3x}$.

Esempio 2. Consideriamo $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$.

La funzione inversa è $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

La funzione reciproco è $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$, $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{x^2}$.

Criterio di Invertibilità

Le funzioni strettamente monotone sono iniettive.

Criterio di Invertibilità:

se f è strettamente monotona e suriettiva, allora f è invertibile.

Se $f : D \to C$ è invertibile, allora

$$f \text{ crescente} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1} \text{ crescente}$$

$$f \text{ decrescente} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1} \text{ decrescente}$$

Esercizi sulle Funzioni Inverse

Esercizio 1. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita: $f(x) = -x + 3$, dire se è invertibile e trovare la formula dell'inversa.

Esercizio 2. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita: $f(x) = x^2 + 2x + 1$, dire se è invertibile e trovare la formula dell'inversa.

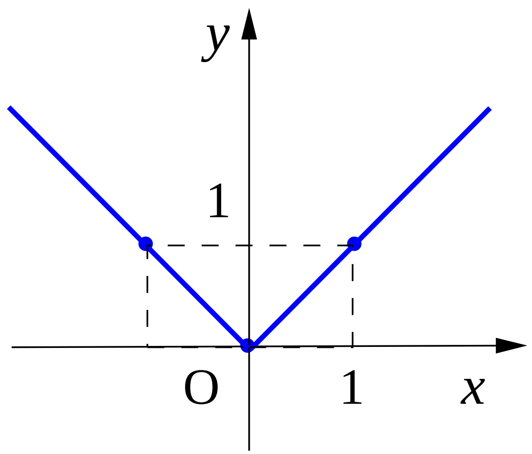
Esercizi sulle Funzioni Inverse (Soluzioni)

Soluzione Esercizio 1: la funzione è biunivoca e l'inversa è $f^{-1}(y) = -y + 3$.

Soluzione Esercizio 2: la funzione non è invertibile in quanto non è né iniettiva, né suriettiva. Per renderla suriettiva basta pensarla a valori in $\mathbb{R}_+$ e per renderla iniettiva basta, per esempio, restringerla a $[-1, +\infty)$. Dunque, la funzione $f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ definita da $f(x) = x^2 + 2x + 1$ è invertibile e la sua inversa è

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to [-1, +\infty), \quad f^{-1}(y) = \sqrt{y} - 1.$$

Funzione Valore Assoluto



$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{per } x \geq 0 \\ -x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

PROPRIETÀ:

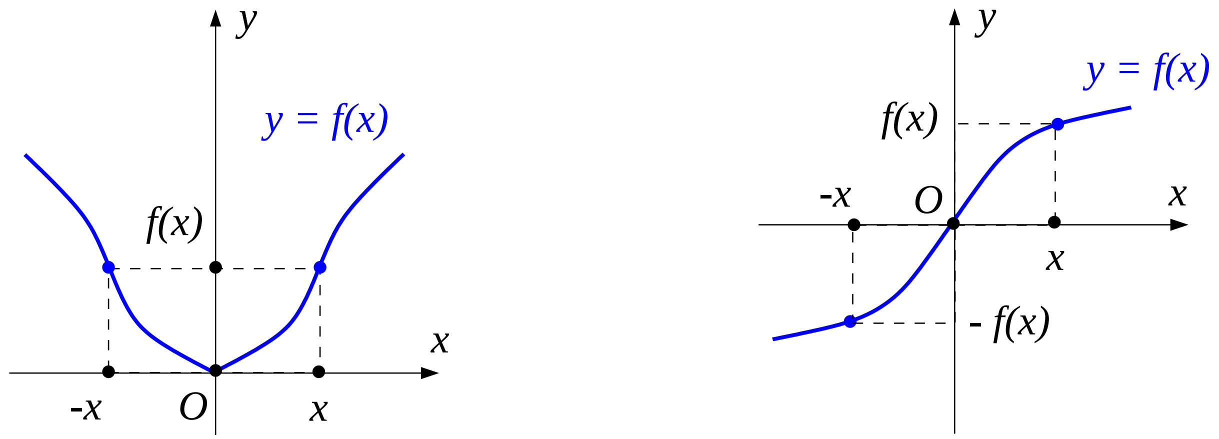
- $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$
- $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- $\left|\dfrac{x_1}{x_2}\right| = \dfrac{|x_1|}{|x_2|} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_2 \neq 0$
- $\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- *disuguaglianza triangolare:*
  $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- se $\delta > 0$, $\; |x| \leq \delta \;\Leftrightarrow\; -\delta \leq x \leq \delta$
  $|\,x - x_0\,| \leq \delta \;\Leftrightarrow\; x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$

Funzioni Pari e Dispari

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice

- PARI: se $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
  In questo caso il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse y
- DISPARI: se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
  In questo caso il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'origine O
- ESEMPI: $f(x) = x^2\,,\ f(x) = x^{2n}\,,\ f(x) = |x|$ funzioni pari

  $f(x) = x\,,\ f(x) = x^{2n+1}\,,\ f(x) = \dfrac{1}{x}$ funzioni dispari



Esercizi

1. Risolvere le seguenti disequazioni:

- $|2x + 3| \leq 1$
- $|2x + 3| \leq -2$
- $|4x + 1| > 2$

Esercizi

2. Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{per } x \leq -1 \\ |x| & \text{per } x > -1 \end{cases}$$

e determinarne gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti e relativi nell'intervallo $(-\infty, 3]$.

3. (compito d'esame del 26/09/2013)
Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{per } -2 \leq x < -1, \\ 2|x| & \text{per } -1 \leq x < 2, \\ 4x - x^2 & \text{per } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

e determinarne gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti e relativi nell'intervallo $[-2, 4]$.

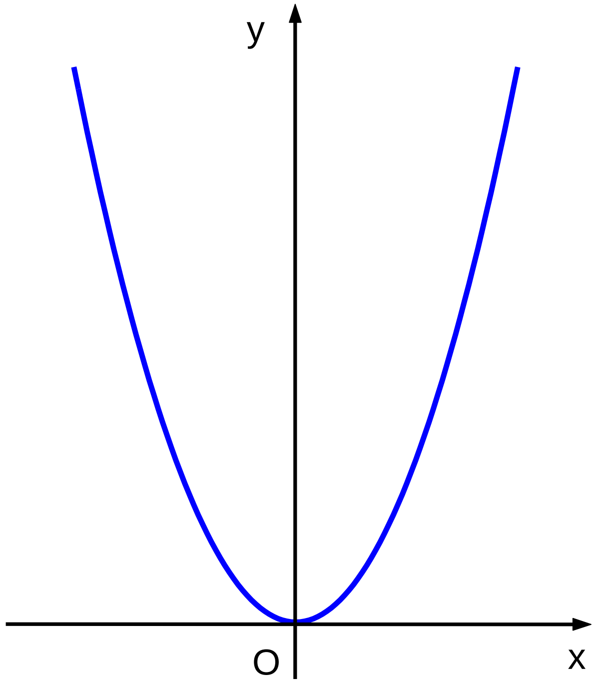
Esercizi

4. (compito d'esame del 26/09/2013)
Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - x^2 & \text{per } -2 \le x < -1, \\ |x| & \text{per } -1 \le x < 2, \\ 4 - x & \text{per } 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

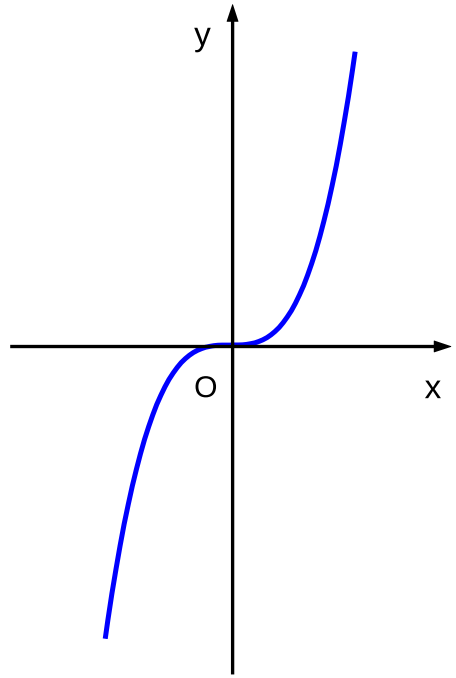
e determinarne gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti e relativi nell'intervallo $[-2, 3]$.

Potenze con Esponente Intero Positivo



$$y = f(x) = x^2$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ funzione pari



$$y = g(x) = x^3$$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione dispari

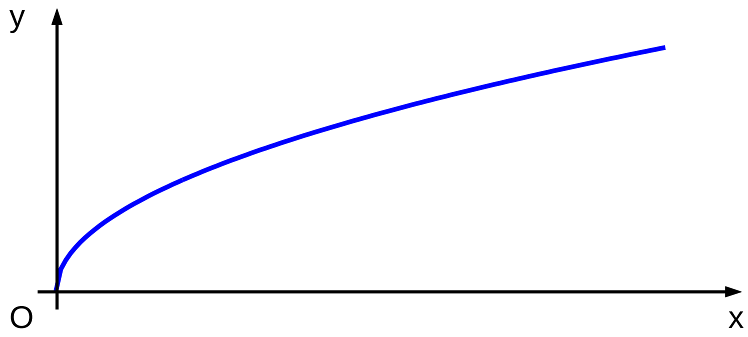
Il grafico di x^n è qualitativamente simile a quello di x^2 se n è pari o a quello di x^3 se n è dispari.

Radici

Consideriamo il problema dell'invertibilità della funzione potenza $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

- Se $n = 1$, la funzione $f(x) = x$ è l'identità, con inversa uguale a se stessa.
- Se $n = 2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ non è invertibile, ma lo è da $[0, +\infty)$ in $[0, +\infty)$. Chiamiamo radice quadrata la sua inversa:

$$f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty), \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

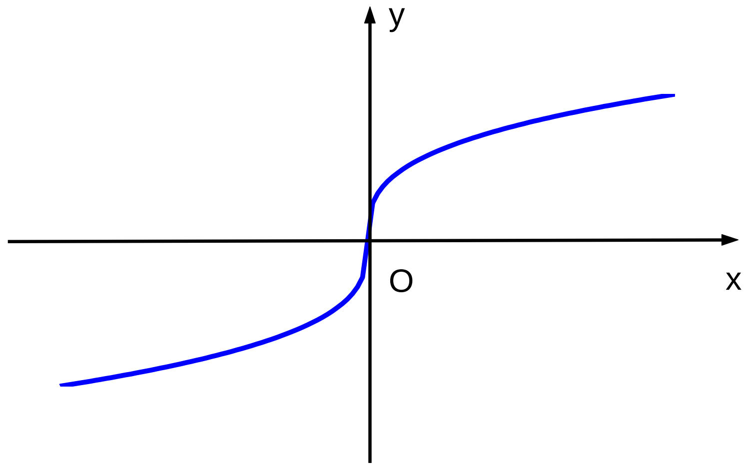


$y = \sqrt{x}$

In generale, se n è pari, la funzione $f(x) = x^n$ è invertibile da $[0, +\infty)$ in $[0, +\infty)$. Chiamiamo l'inversa radice n-sima $\sqrt[n]{x}$ definita da $[0, +\infty)$ in $[0, +\infty)$.

Radici

- Se $n = 3$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ è invertibile.
  Chiamiamo radice cubica la sua inversa:
$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$



$$y = \sqrt[3]{x}$$

In generale, se n è dispari, la funzione $f(x) = x^n$ è invertibile da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.
Chiamiamo radice n-sima $\sqrt[n]{x}$ definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Funzioni Potenza

Potenze ad esponente intero:

- se $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- se l'esponente è un intero negativo,

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad \text{definita per ogni } x \neq 0.$$

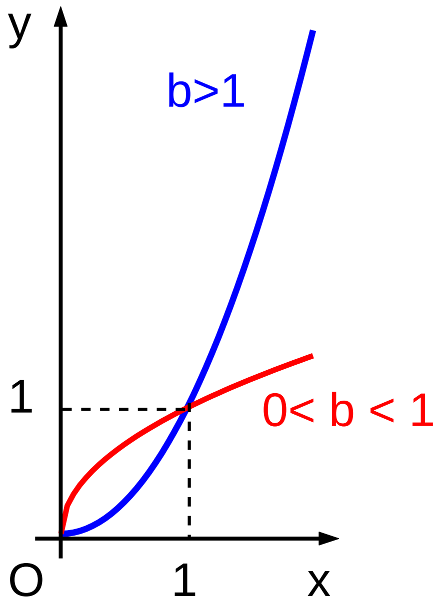
Potenze ad esponente razionale: per $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

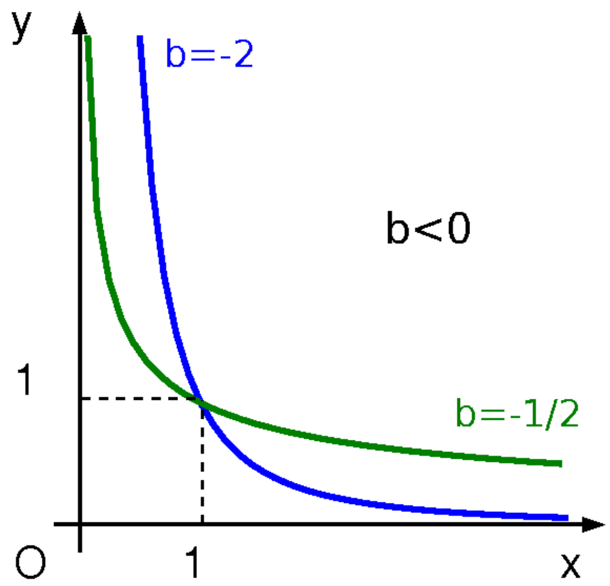
$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \qquad \text{definita per ogni } x > 0.$$

Potenze ad esponente reale: per *estensione* si può definire la *potenza ad esponente reale*: $b \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^b \qquad \text{definita per ogni } x > 0 \qquad \text{(resta indefinito } 0^0 \text{ !!!)}$$

Grafico di $f(x) = x^b$ con $b \in \mathbb{R}$





$y = f(x) = x^b$ per $b > 0$

$f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$

$y = f(x) = x^b$ per $b < 0$

$f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$

Ancora sulle Potenze

Polinomi: con operazioni di somma e prodotto si costruiscono i *polinomi*, cioè le funzioni del tipo:

$$x \mapsto P_n(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_{n-1}\, x^{n-1} + a_n\, x^n.$$

P_n è detto polinomio di grado n.

Funzioni Razionali: facendo il quoziente di due polinomi P e Q si ottengono le *funzioni razionali*, del tipo:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{definita su } \{x \in \mathbb{R} : \; Q(x) \neq 0\}.$$

Come caso particolare ritroviamo le funzioni potenza con esponente intero:

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{definita su } \mathbb{R} - \{0\}.$$

Campo di Esistenza

Il campo di esistenza di una funzione f è il dominio più grande su cui ha significato la funzione f.

Esercizio. Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = 9 + 2x$

2) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{-x}$

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-4}$

4) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x+3}}$

Campo di Esistenza

Soluzione:

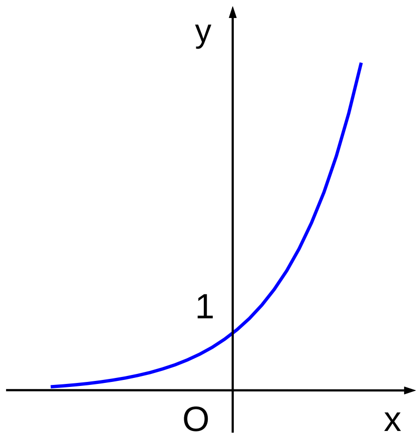
1) $\mathbb{R}$

2) Affinché le due radici abbiano significato, i radicandi devono essere entrambi non negativi: $x - 2 \geq 0$ e $-x \geq 0$, cioè $x \geq 2$ e $x \leq 0$. Segue che la funzione non è definita per alcun valore di x.

3) Il denominatore deve essere diverso da zero, cioè $x \neq 2$ e $x \neq -2$. L'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, cioè $9 - x^2 \geq 0$ e quindi $-3 \leq x \leq 3$. Dunque il campo di esistenza è $[-3, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 3]$.

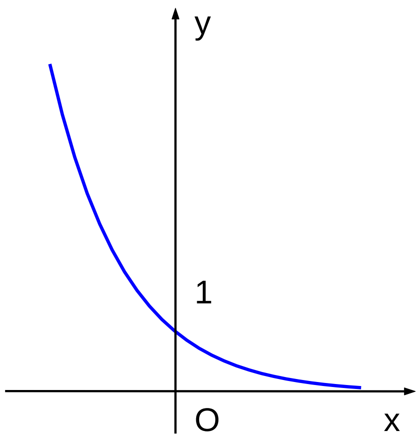
4) L'unica condizione da imporre è che il denominatore sia diverso da 0. Quindi il campo di esistenza è $\mathbb{R} - \{-3\}$.

Funzione Esponenziale



$f : \mathbb{R} \to (0, +\infty),\ f(x) = a^x$ con $a > 1$

- $a^0 = 1,\ \ a^1 = a$
- $a^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$
- *strettamente crescente:* $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$
- se x tende a $+\infty$, a^x tende a $+\infty$
- se x tende a $-\infty$, a^x tende a 0



$f : \mathbb{R} \to (0, +\infty),\ f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$

- $a^0 = 1,\ \ a^1 = a$
- $a^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$
- *strettamente decrescente*: $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$
- se x tende a $+\infty$, a^x tende a 0
- se x tende a $-\infty$, a^x tende a $+\infty$

PROPRIETÀ DELL'ESPONENZIALE:

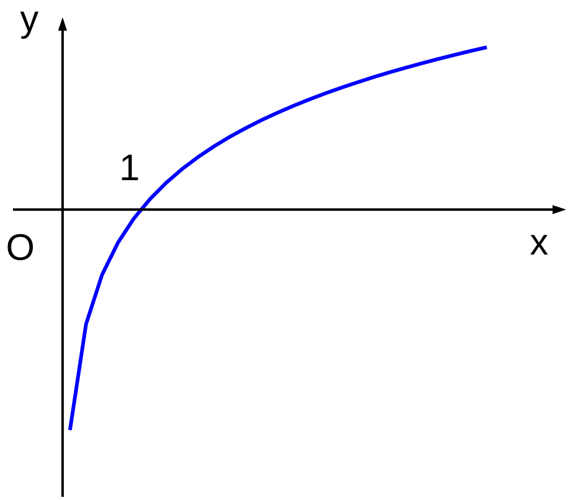
$$a^x a^y = a^{x+y} \quad \text{(prodotto)}, \qquad (a^x)^y = a^{xy} \quad \text{(composizione)}, \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad \text{(reciproco)}.$$

Funzione Logaritmo

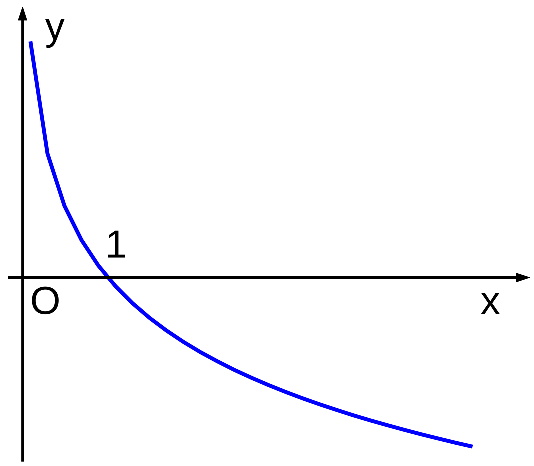
La funzione esponenziale $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$ è strettamente monotona e suriettiva, quindi invertibile.

$$f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \; f^{-1}(x) = \log_a x \qquad \text{logaritmo in base } a \text{ di } x$$

$$\log_a x = y \;\Leftrightarrow\; a^y = x$$



$y = \log_a x$ con $a > 1$



$y = \log_a x$ con $0 < a < 1$

Proprietà del Logaritmo

Il logaritmo $\log_a x$ è l'esponente a cui bisogna elevare la base a per ottenere x.

- $a^{\log_a x} = x$ per ogni $x > 0$
- $\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$
- $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$ per ogni $x_1, x_2 > 0$
- $\log_a \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$ per ogni $x_1, x_2 > 0$
- $\log_a(x^b) = b \log_a x$ per ogni $x > 0$ e $b \in \mathbb{R}$
- cambio di base: $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ per ogni $x > 0$ e $a, b > 0$

Il pH

Acidi e sali in soluzioni acquose formano ioni di idrogeno. La concentrazione di questi ioni permette di quantificare il grado di acidità o alcalinità della soluzione.

Il punto di riferimento è l'acqua pura a 25 gradi C, in cui si hanno 10^{-7} moli/l di ioni. Si parla di:

- soluzioni acide, se la concentrazione di ioni è maggiore di 10^{-7}
- soluzioni basiche o alcaline, se la concentrazione di ioni è minore di 10^{-7}
- soluzioni neutre, se la concentrazione di ioni è pari a 10^{-7}

Si definisce pH

$$\mathrm{pH} = -\log_{10} \mathrm{H}^{+}$$

dove H^{+} è la concentrazione di ioni idrogeno.

Il pH – Esercizio

sostanza	pH
acqua pura	7
sangue	7.4
pioggia	6.5

Il pH della pioggia e quello del sangue differiscono di poco; tuttavia,

$$H^{+}_{\text{pioggia}} = 10^{-6.5}, \qquad H^{+}_{\text{sangue}} = 10^{-7.4},$$

da cui

$$\frac{H^{+}_{\text{pioggia}}}{H^{+}_{\text{sangue}}} = 10^{0.9} \simeq 8,$$

cioè la concentrazione di ioni nella pioggia è circa 8 volte quella del sangue.

Esercizio. Verificare che la concentrazione di ioni idrogeno nel sangue è circa il 40% di quella nell'acqua.

Esercizi

1. Sapendo che $\log_{10} 2 \simeq 0.30103$ e che $\log_{10} e \simeq 0.43429$, calcolare i valori di $\log_{10} 4$, $\log_{10} \frac{1}{5}$, $\log_e 2$.

2. Determinare le costanti α e β in modo che il grafico della funzione $f(x) = \alpha\, e^{\beta\, x}$ passi per i punti $(0, 5)$ e $(4, 15)$.

3. Determinare l'insieme dei valori di x per cui si ha $\log_{10}(2x+3) < 1$.

Esercizi

4. Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \log_{10}(x^2 - 5x + 6).$$

5. Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log_{10}(x^2 - 5x + 7)}.$$

6. Determinare il campo di esistenza della funzione $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$.

Esercizi (Soluzioni)

1. Basta notare che

$$\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2 \log_{10} 2,$$

$$\log_{10} \tfrac{1}{5} = \log_{10} \tfrac{2}{10} = \log_{10} 2 - \log_{10} 10 = \log_{10} 2 - 1,$$

$$\ln 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} e}.$$

2. Poiché $f(0) = \alpha$, si ha immediatamente che $\alpha = 5$. Si ottiene quindi che $f(4) = 5e^{4\beta} = 15$, da cui $e^{4\beta} = 3$, cioè $\beta = \frac{1}{4} \ln 3$.

3. L'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè $2x + 3 > 0$. Inoltre, per la stretta monotonia dell'esponenziale la condizione $\log_{10}(2x + 3) < 1$ è equivalente a $2x + 3 < 10$.

Pertanto, l'insieme cercato è l'intervallo $(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$.

Esercizi (Soluzioni)

4. L'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè $x^2 - 5x + 6 > 0$, quindi il campo di esistenza è $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

5. L'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè $x^2 - 5x + 7 > 0$. L'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, cioè $\log_{10}(x^2 - 5x + 7) \geq 0$, quindi $x^2 - 5x + 7 \geq 1$.

La seconda condizione contiene anche la prima. Quindi, il campo di esistenza è $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.

6. L'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, cioè $e^x - 1 \geq 0$ e quindi $x \geq 0$. Il campo di esistenza è $[0, +\infty)$.

Esercizi

1. Date le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln(x - 2)$,

(a) dire quanto vale $f \circ g$ e qual è il suo insieme di definizione;

(b) dire quanto vale $g \circ f$ e qual è il suo insieme di definizione.

2. Date le funzioni $f(x) = -x^3$ e $g(x) = \ln x$,

(a) dire quanto vale $f \circ g$ e qual è il suo insieme di definizione;

(b) dire quanto vale $g \circ f$ e qual è il suo insieme di definizione.

Esercizi (Soluzioni)

1.

$(f \circ g)(x) = e^{\ln(x-2)} = x - 2$ definita per $x > 2$.

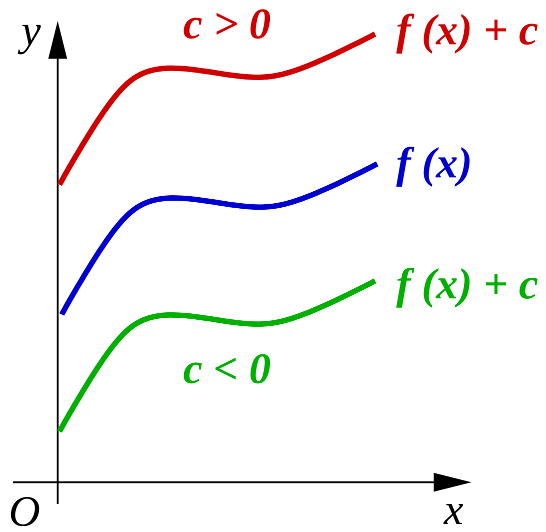
$(g \circ f)(x) = \ln(e^x - 2)$ definita per $x > \ln 2$.

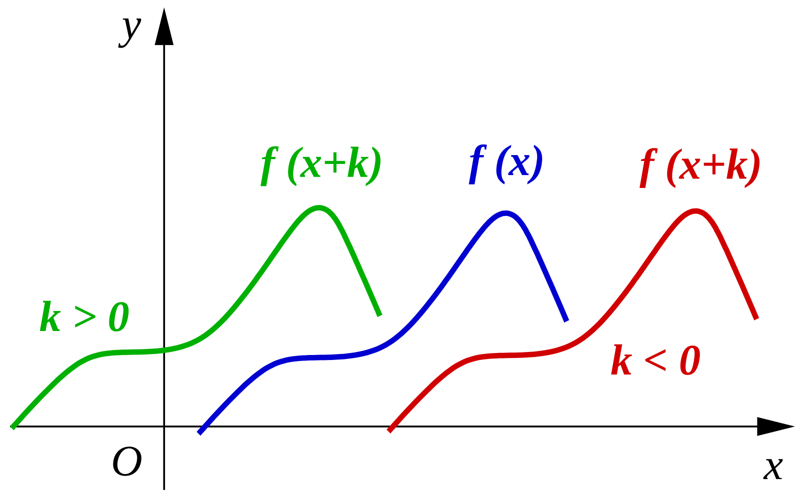
2.

$(f \circ g)(x) = -(\ln x)^3$ definita per $x > 0$.

$(g \circ f)(x) = \ln(-x^3)$ definita per $x < 0$.

Traslazioni





Traslazioni verticali:

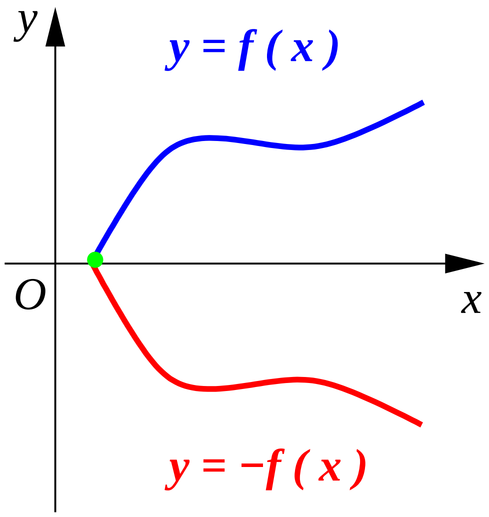
$y = f(x) + c$ traslazione verticale verso l'alto se $c > 0$, verso il basso se $c < 0$

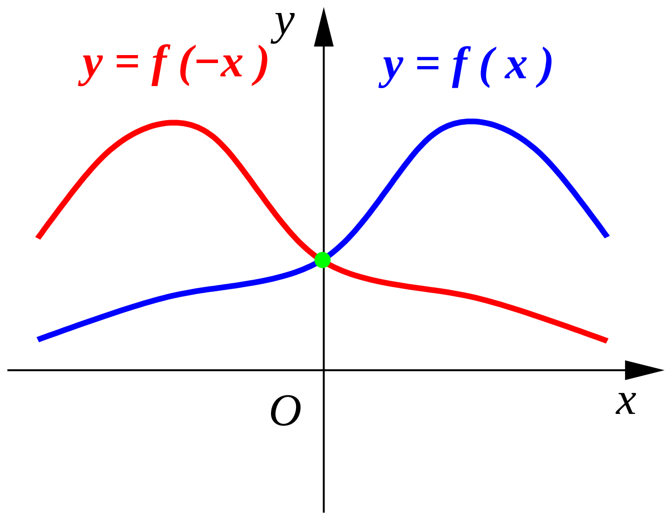
Traslazioni orizzontali:

$y = f(x + k)$ traslazione orizzontale verso sinistra se $k > 0$, verso destra se $k < 0$

Esercizio: disegnare il grafico delle funzioni $y = 1 + \ln x$, $y = |x| - 3$, $y = e^x + 1$,
$y = x^2 - 1$, $y = \ln(x - 1)$, $y = |x + 2|$, $y = e^{x+3}$

Riflessioni





Riflessione rispetto all'asse x:

$y = -f(x)$ i punti di intersezione con l'asse x restano invariati

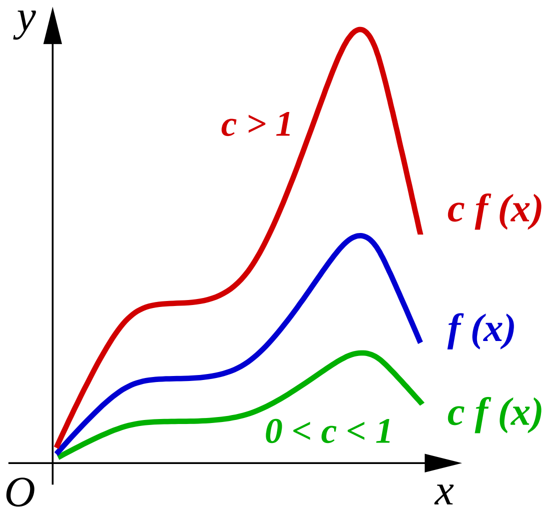
Esercizio: disegnare il grafico di $y = -|x|\,,\quad y = -\dfrac{1}{x}\,,\quad y = \ln\dfrac{1}{x} = -\ln x$

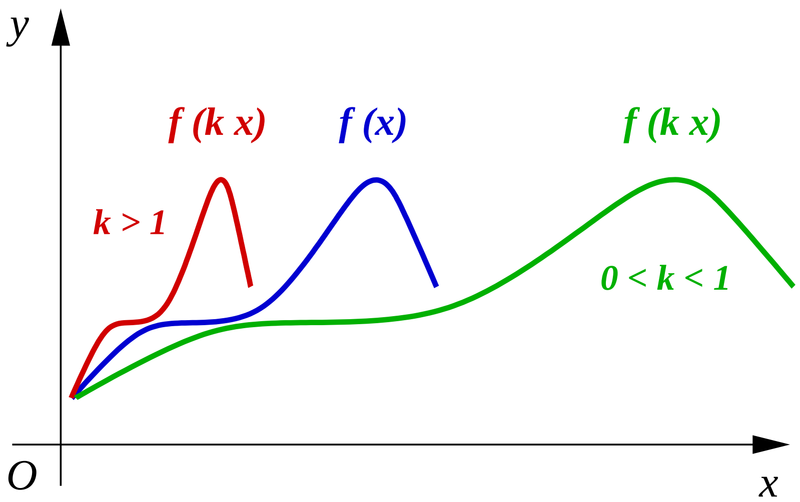
Riflessione rispetto all'asse y:

$y = f(-x)$ i punti di intersezione con l'asse y restano invariati

Esercizio: disegnare il grafico di $y = e^{-x}\,,\quad y = \sqrt{-x}$

Dilatazioni





Cambio di scala sull'asse y:

$y = c \cdot f(x)$ compressione per $0 < c < 1$, dilatazione per $c > 1$

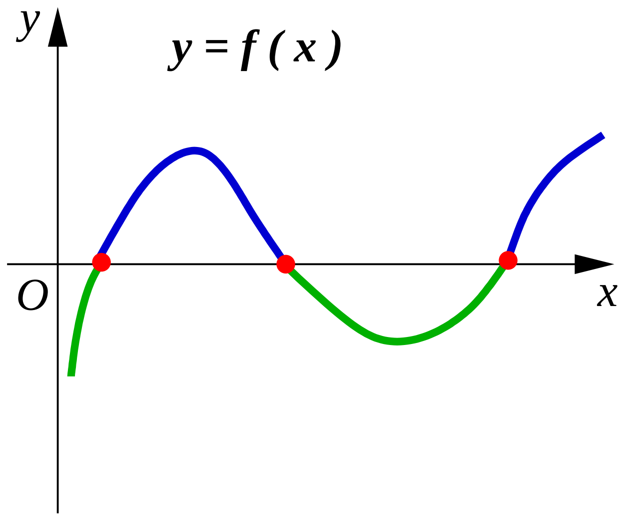
Esercizio. Disegnare i seguenti grafici: $y = \frac{1}{2}x^2\,,\ \ y = \log_{10} x^3 = 3\log_{10} x\,,\ \ y = 5e^x$

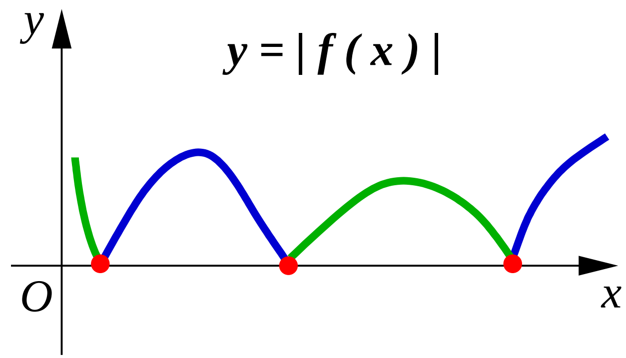
Cambio di scala sull'asse x:

$y = f(k \cdot x)$ dilatazione per $0 < k < 1$, compressione per $k > 1$

Esercizio. Disegnare i seguenti grafici: $y = \frac{1}{3}x\,,\quad y = \sqrt{2x}\,,\quad y = e^{2x}$

Valore Assoluto





$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} \qquad \text{(riflessione)}$$

Nota: gli zeri della funzione restano invariati

Esercizio: disegnare il grafico di $y = |2x + 1|$, $y = |x^3|$, $y = |\ln x|$

Esercizi

1. Tracciare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{per } x \leq 0, \\ |x - 1| & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

Determinare gli eventuali punti e valori di massimo e minimo assoluti e relativi per $x \in (-\infty, 4]$.

2. Tracciare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & \text{per } x \leq 1, \\ \ln x & \text{per } x > 1. \end{cases}$$

Determinare gli eventuali punti e valori di massimo e minimo assoluti e relativi per $x \in \mathbb{R}$.

Esercizi

3. Tracciare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 - |x| & \text{per } x \leq 2, \\ \ln(\frac{1}{2}x) & \text{per } x > 2. \end{cases}$$

Determinare gli eventuali punti e valori di massimo e minimo assoluti e relativi per $x \in [-3, +\infty)$.

4. Tracciare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 4x^2 & \text{per } x \leq \frac{1}{2}, \\ \ln(2x) & \text{per } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Determinare gli eventuali punti e valori di massimo e minimo assoluti e relativi per $x \in [-1, +\infty)$.

Esercizi

5. Tracciare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{per } x \leq 1, \\ -\ln x & \text{per } x > 1. \end{cases}$$

Determinare gli eventuali punti e valori di massimo e minimo assoluti e relativi per $x \in [-2, +\infty)$.