Attività svolta con tutte le classi

Secondo quanto concordato durante gli incontri pomeridiani con gli insegnanti sperimentatori, la prima parte del progetto sarebbe stata svolta in classe. Erano infatti previste quattro lezioni da due ore ciascuna, per un totale di otto ore, articolate nel seguente modo:

- Prima lezione (2 ore) : clessidre;
- Seconda lezione (2 ore) : clessidre e segmenti;
- Terza lezione (2 ore) : recipienti;
- Quarta lezione (2 ore) : divisibilità.

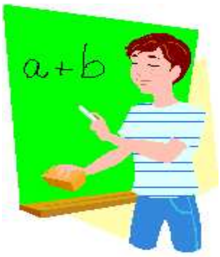
Per lo svolgimento delle quattro lezioni sono state preparate alcune schede di lavoro da consegnare agli studenti, dopo la loro suddivisione in gruppi cooperativi composti da cinque ragazzi ciascuno.
Nei paragrafi che seguono si presentano e si descrivono in dettaglio le schede di ogni lezione, con particolare attenzione alle motivazioni delle scelte effettuate, agli obiettivi da raggiungere e ai metodi risolutivi che gli studenti avrebbero potuto utilizzare, compiendo, quindi, un'analisi a priori.

1. PRIMA LEZIONE : CLESSIDRE

COMPITO 1

E' possibile determinare un intervallo di tempo di 13 minuti per mezzo di due clessidre, una da 6 e una da 11?

COMPITO 2



Scrivere una formula (espressione letterale, equazione, ecc..) legata al problema precedente o alla sua risoluzione.

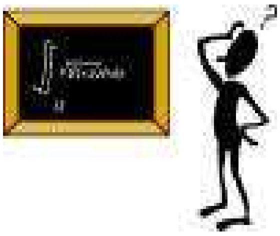
Con queste prime due schede di lavoro, gli studenti avrebbero dovuto prima risolvere il problema di clessidre e poi cerare di scrivere una formula legata alla sua risoluzione, creando quindi una situazione simile a quella del matematico alle prese con un problema nuovo, valorizzando così i processi di ricerca che portano all'elaborazione di un nuovo risultato: tentativi empirici di risoluzione e loro formalizzazione.
In particolare, relativamente a questo primo problema, i possibili metodi risolutivi sono:

- uno più intuitivo: accorgendosi che 6*4 – 11=13, si fanno partire contemporaneamente la clessidra da 6 minuti, C_6 , e quella da 11 minuti, C_{11}. Allo scadere di C_{11} , parte il conteggio dei 13 minuti. Quando C_6 si esaurisce, la si capovolge; l'operazione si ripete per tre volte;
- uno più rigoroso: poiché 6 e 11 sono primi tra loro, si può scrivere l'identità di Bézout e cercare poi due numeri x e y tali che $6x - 11y=13$. Questi due numeri indicano quante volte si devono girare le due clessidre.

COMPITO 3

E' possibile determinare un intervallo di 9 minuti con due clessidre da 7 e da 11 minuti?

COMPITO 4



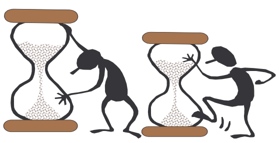
Scrivere una formula (espressione letterale, equazione, ecc..) legata all'ultimo problema o alla sua risoluzione.

Anche in queste due ultime schede del primo incontro, le richieste e gli obiettivi sono uguali a quelli delle prime due. La situazione problematica proposta è la stessa, ciò che cambiano sono i minuti delle clessidre e l'intervallo di tempo da determinare. Come prima, alcuni tra i possibili metodi risolutivi sono:

- uno più intuitivo che consiste nel far partire contemporaneamente la clessidra da 7 minuti, C_7 , e quella da 11 minuti, C_{11}, e determinare quanti giri occorre far fare alle due clessidre in modo tale che tra la fine dell'una e la fine dell'altra passino 9 minuti (11*4-7*5=9);
- uno più rigoroso: poiché 7 e 11 sono primi tra loro, si può scrivere ancora l'identità di Bézout e cercare due numeri x e y tali che
  $7x - 11y = 9$.

2. SECONDA LEZIONE: CLESSIDRE E SEGMENTI

COMPITO 1



E' possibile determinare un intervallo di tempo di 9 minuti con due clessidre da 8 e da 10 minuti? E con clessidre da 6 e da 21?

COMPITO 2

Scrivere una formula (espressione letterale, equazione, ecc..) legata al problema precedente o alla sua risoluzione.

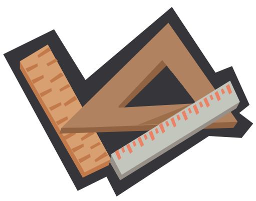
In queste prime due schede del secondo incontro viene proposta la stessa situazione problematica delle clessidre della prima lezione a cui segue la richiesta di formalizzazione. I possibili procedimenti risolutivi sono gli stessi già presentati precedentemente. E' bene però notare che con clessidre da 8 e 10 minuti non è possibile determinare un intervallo da 9 minuti, perché la somma, o la differenza, di multipli di numeri pari è ancora un numero pari, quindi mai 9.

Dai risultati ottenibili dagli esercizi proposti, si può quindi concludere che, date due clessidre, che misurano rispettivamente a e b minuti, gli intervalli di tempo determinabili sono tutti i multipli del massimo comun divisore di a e b. Quindi, per determinare un intervallo di c minuti, a e b devono essere tali che:

d $(a, b) = 1$ oppure

d $(a, b) = d$ tale che d divide c.

COMPITO 3



Si dispone di due righe non graduate, una di lunghezza 6 cm e una di lunghezza 15 cm. Su un foglio di carta illimitato quali segmenti è possibile misurare?
Qual è il più piccolo segmento misurabile?

COMPITO 4

Scrivere una formula (espressione letterale, equazione, ecc..) legata al problema precedente o alla sua risoluzione

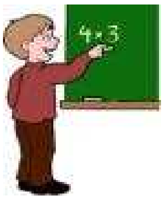
Il terzo compito di questa seconda lezione propone un problema formulato in un contesto diverso, ma alla cui risoluzione sottende la stessa formalizzazione dei problemi di clessidre. La formula risolutiva del problema è infatti ancora l'identità di Bézout ax-by=c. Considerando le osservazioni precedenti, è chiaro che il segmento più piccolo misurabile è il massimo comun divisore delle lunghezza delle due righe, cioè 3, mentre i segmenti misurabili sono tutti e soli i multipli di questo, cioè tutti e soli i multipli di 3.

3. TERZA LEZIONE: RECIPIENTI

COMPITO 1

Avete a disposizione un rubinetto, una bacinella e due recipienti, uno da 12 e l'altro da 17 litri. Come fate a mettere nella bacinella 8 litri d'acqua?
(Nota: dal rubinetto è possibile prendere acqua a volontà. Suggerimento: è possibile utilizzare sia i recipienti sia la bacinella..)

COMPITO 2



Scrivere una formula (espressione letterale, equazione, ecc..) legata al problema precedente o alla sua risoluzione.

Anche questi primi due compiti della terza lezione si svolgono come i precedenti, ciò che cambia ancora una volta è il contesto del problema. Rispetto ai problemi di clessidre e di segmenti, il modello dell'acqua è meno facile da gestire, perciò è stato aggiunto il suggerimento tra parentesi di utilizzare sia i recipienti che la bacinella. I possibili metodi risolutivi anche in questo caso sono gli stessi dei problemi precedenti. Nell'identità di Bézout ax - by = c che i ragazzi dovrebbero impostare, a e b rappresentano le capacità massime dei due recipienti, c la quantità di acqua da versare nella bacinella. I numeri x e y da determinare sono invece il numero di volte che i recipienti vanno riempiti e svuotati.

COMPITO 3

Avete a disposizione un rubinetto, una bacinella e de recipienti, uno da 12 e l'altro da 15 litri. Come fate a mettere nella bacinella 8 litri d'acqua?
Qual è la quantità minima di acqua che potete determinare?
Quali quantità è possibile determinare? Perché?

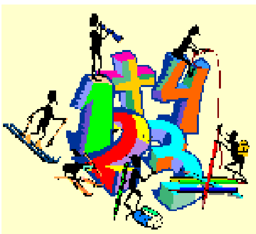
COMPITO 4

Scrivere una formula (espressione letterale, equazione, ecc..) legata all'ultimo problema o alla sua risoluzione.

Considerato quanto detto per i problemi di clessidre e di segmenti, la più piccola quantità di acqua che può essere versata nella bacinella è il massimo comun divisore delle capacità delle due clessidre, cioè 3, mentre le possibili quantità di acqua versabili nella bacinella sono tutti e soli i multipli di questo, cioè di 3. Quindi, non essendo 8 un multiplo di 3, i ragazzi dovrebbero osservare che il problema non è risolubile.

4. QUARTA LEZIONE: DIVISIBILITA'

COMPITO 1



Quali sono i multipli di 7 che divisi per 12 hanno resto 3?

Questo primo compito della quarta lezione rappresenta un problema il cui metodo di risoluzione è analogo ai precedenti. Tuttavia, mentre i problemi proposti nelle prime tre lezioni erano formulati nell'ambito di contesti concreti e particolari (clessidre, recipienti, segmenti), quest'ultimo è un problema strettamente numerico. Ciò che ci si aspettava era che i ragazzi avrebbero trovato maggiori difficoltà nell'affrontare quest'ultima tipologia di esercizi.

Uno dei possibili metodi risolutivi che gli studenti avrebbero potuto utilizzare è quello di sfruttare la relazione che lega dividendo, divisore, quoziente e resto. Si può infatti osservare che:

$$7k = 12q + 3$$

$$q = 5 \quad 7k = 63 \quad n = 1$$

$$q = 12 \quad 7k = 147 \quad n = 2$$

$$q = 19 \quad 7k = 231 \quad n = 3$$

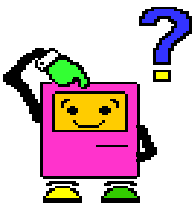
$$q = 26 \quad 7k = 315 \quad n = 4$$

$$\Rightarrow \quad q = 5 + 7*(n - 1) = 7n - 2$$

$$7k = 12*(7n - 2) + 3 = 84n - 21$$

$$k = 12n - 3$$

COMPITO 2



Quali sono i multipli di 6 che divisi per 12 hanno resto 2?

Quali sono i multipli di 6 che divisi per 12 hanno resto 7?

Il secondo compito, che comprende due domande, è impossibile perché

$$6k = 12q + 2 \Rightarrow 6(k - 2q) = 2$$

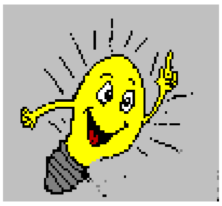
$$6k = 12q + 7 \Rightarrow 6(k - 2q) = 7$$

In entrambi i casi il membro di sinistra è un multiplo di 6, mentre 2 e 7 non lo sono, quindi non esistono multipli di 6 che divisi per 12 danno resto 2 e 7. Tra l'altro, gli unici resti possibili sono solo 0 e 6.

COMPITO 3

Scrivere una formula (espressione letterale, equazione, ecc..) legata ai problemi precedenti o alla loro risoluzione.

COMPITO 4



Vedete legami tra i problemi affrontati in tutti gli incontri? (clessidre, recipienti, multipli).

Mentre il terzo compito, già presentato al termine di ogni problema da risolvere, vuole far sì che i ragazzi sviluppino la capacità di formalizzare mediante la scrittura di una formula il procedimento seguito nella risoluzione di un esercizio, aiutandoli così a riflettere circa le strategie risolutive utilizzate, l'ultimo compito rappresenta un quesito conclusivo e riassuntivo dell'intera attività svolta al mattino. I problemi proposti, infatti, benché presentati in contesti e situazioni differenti, sono tutti accomunati dal fatto che la loro risoluzione richiede l'uso dell'identità di Bézout ax - by = c. Quest'ultima domanda, quindi, vuole verificare se gli studenti hanno individuato il legame tra gli esercizi, facendo inoltre loro comprendere come problemi apparentemente molto diversi tra loro richiedano invece gli stessi procedimenti risolutivi.