GLI APPROFONDIMENTI

Secondo quanto concordato, la seconda parte del progetto avrebbe previsto lo svolgimento di quattro approfondimenti pomeridiani da circa tre ore ciascuno, rivolti agli studenti maggiormente interessati e articolati nel seguente modo:

- Primo approfondimento: le Torri di Hanoi;
- Secondo approfondimento: la tassellazione nel piano e i cinque poliedri regolari;
- Terzo approfondimento: alla conquista delle formule: diversi aspetti di un percorso a ostacoli – I parte;
- Quarto approfondimento: alla conquista delle formule: diversi aspetti di un percorso a ostacoli – II parte.

1. LE TORRI DI HANOI

Il primo approfondimento pomeridiano, fissato per il giorno Giovedì 22 Febbraio 2007, avrebbe previsto la risoluzione, da parte degli studenti, del problema delle Torri di Hanoi. Questo gioco nasce in relazione ad una leggenda, il cui testo, che segue, abbiamo deciso di presentare ai ragazzi in modo tale da permettere loro di conoscere il gioco e le sue regole, qualora qualcuno non avesse mai sentito parlare di questo problema.

Le Torri di Hanoi : la leggenda ……….

“ Nel grande tempio di Brahma a Benares, su di un piatto di ottone, sotto la cupola che segna il centro del mondo, si trovavano tre colonne di diamanti e 64 dischi d’oro puro infilati su di esse. I monaci li spostano uno alla volta da una colonna all’altra, seguendo l’immutabile legge di Brahma: nessun disco può essere posato su un altro più piccolo. All’inizio del mondo tutti i 64 dischi erano infilati in una colonna e formavano la Torre di Brahma. Il processo di spostamento dei dischi da una colonna all’altra è tuttora in corso. Quando l’ultimo disco sarà finalmente piazzato a formare di nuovo la Torre di Brahma in una colonna diversa, allora arriverà la fine del mondo e tutto si trasformerà in polvere.”

Il gioco (e forse la leggenda) fu inventato dal matematico francese Edouard Lucas nel 1883, mentre Vittorio Checcucci lo riprese negli anni '70 nell'ambito di una mostra di materiale didattico dal titolo "I numeri naturali, quando servono per ragionare", presentandolo con il modello in legno sopra riportato e con poche righe di regole del gioco.
Il problema si presta ad una risoluzione algoritmica ed è spesso proposto nei corsi di informatica. Si tratta inoltre di una situazione problematica ricca, aperta, proponibile con diversi gradi di approfondimento a diversi livelli di scuola, offrendo l'opportunità di scrivere, trasformare, interpretare formule e costituendo un esempio interessante di uso dell'algebra come strumento per pensare e per conoscere.
Quelle che seguono sono le schede di lavoro preparate per gli studenti.

COMPITO 1

Provate a spostare una torre formata da 4 dischi seguendo la legge di Brahma.

Quante mosse avete fatto?

E' il numero minimo di mosse possibili?

Con questo primo compito si vuole far risolvere il gioco agli studenti con un numero sufficientemente basso di dischi. E' stato infatti concordato che 4 rappresenti il numero ideale di dischi che non avrebbe creato loro troppe difficoltà. Se fossero sorte incertezze, ogni gruppo avrebbe potuto provare inizialmente con 2 o 3 dischi per poi passare al numero richiesto.
Una volta risolto il problema, i ragazzi avrebbero quindi dovuto indicare il numero di mosse utilizzate e determinare se questo corrisponde al numero minimo di spostamenti possibili.

COMPITO 2

Quante mosse sono necessarie per spostare 5 dischi?
Cercate di trovare una formula che vi permetta di generalizzare?

Una volta risolto il problema con 4 dischi, con questo compito si vuole aumentare la difficoltà proponendo di spostare 5 dischi. Determinato il numero di mosse necessarie, i ragazzi avrebbero quindi dovuto cercare di scrivere una formula che avrebbe permesso di generalizzare fornendo il numero minimo di mosse in relazione al numero di dischi da spostare. I ragazzi avrebbero dovuto giungere alla formalizzazione osservando e determinando un legame tra il numero necessario di mosse per risolvere il problema con 4 e 5 dischi.
Dopo aver trovato una strategia per eseguire gli spostamenti, gli studenti avrebbero dovuto scoprire quante mosse ci vogliono per spostare i dischi seguendo le regole:

$n = 1$	1
$n = 2$	3
$n = 3$	7
$n = 4$	15
$n = 5$	31

Congetturando, allora, che per n dischi le mosse necessarie siano $2^n - 1$,
per n+1 dischi le mosse saranno $(2^n - 1) +1+ (2^n - 1) = 2*2^n - 1 = 2^{n+1} – 1$
Infatti ad ogni nuovo disco si dovranno spostare tutti quelli che lo precedono fino a “liberarlo”, poi spostare il nuovo disco, poi spostare di nuovo tutti i precedenti per sovrapporli a questo.

COMPITO 3

Abbiamo visto che per spostare i 64 dischi occorrono

$2^{64} - 1$ mosse.

Se per spostare ogni disco ci vuole un minuto, quanti anni sono necessari per spostare tutti i dischi?
(Non si chiede il numero esatto, ma un valore approssimato…)

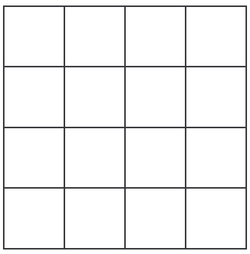
Con questo terzo e ultimo compito del primo approfondimento si vuole proporre uno dei possibili sviluppi del problema delle Torri di Hanoi. Una volta determinato il numero di mosse necessarie per spostare i 64 dischi di cui si parla nella leggenda e ipotizzando che il tempo impiegato per muovere un disco sia un minuto, i ragazzi avrebbero dovuto determinare un’approssimazione del numero di anni necessari per spostare tutti i dischi, dando quindi la possibilità di ulteriori interessanti considerazioni sugli ordini di grandezza.
I ragazzi avrebbero infatti dovuto cercare di scrivere $2^{64} – 1$ in termini di potenze di 10. Osservando che $2^{64} – 1$ è circa 10^{19}, il numero di anni necessari per spostare tutti i dischi è circa 10^{13}.

2. LA TASSELLAZIONE NEL PIANO E I 5 POLIEDRI REGOLARI

Il secondo approfondimento pomeridiano, fissato per il giorno Mercoledì 28 Febbraio 2007, avrebbe affrontato il problema della tassellazione del piano e della individuazione e costruzione dei poliedri regolari. Dopo aver consegnato agli studenti presenti cartoncini colorati a forma di triangoli equilateri, pentagoni, esagoni, ettagoni e ottagoni, sarebbe stata proposta loro la seguente prima scheda di lavoro:

COMPITO 1

Spesso i pavimenti sono ricoperti con piastrelle quadrate disposte in modo che due piastrelle vicine abbiano in comune o solo un vertice o un intero lato.



Con quali altri poligoni regolari (triangoli equilateri, pentagoni, esagoni…) tutti uguali fra loro è possibile ricoprire un pavimento rispettando le stesse regole (cioè due piastrelle vicine possono avere in
comune solo un vertice o un intero lato)?
Se vi è utile, aiutatevi con i cartoncini.

Il problema proposto agli studenti è quello di determinare con quali poligoni regolari, tutti isometrici tra loro, è possibile ricoprire il piano. Noto che con i quadrati è possibile, dal momento che spesso i pavimenti sono ricoperti con piastrelle quadrate, i ragazzi, servendosi delle sagome di cartone loro consegnate, avrebbero dovuto determinare con quali altri poligoni regolari è tassellabile il piano, tenendo presente che due poligoni adiacenti possono avere in comune o solo un vertice, oppure un intero lato.
Dopo alcuni tentativi, gli studenti avrebbero dovuto osservare che la pavimentazione è realizzabile solo con triangoli equilateri ed esagoni.
Una volta determinata la risposta al primo compito, i ragazzi avrebbero dovuto scrivere una formula in grado di determinare direttamente la soluzione del problema. La scheda di lavoro proposta per seconda è quindi la seguente:

COMPITO 2

Cercate ora di trovare una formula che permetta di dare una risposta generale.
Tenete presente che per individuare le possibili piastrellature sono importanti due numeri interi:

- **il numero dei lati delle piastrelle;**
- **il numero di piastrelle che hanno un vertice in comune.**

Alla richiesta di determinare una formula che permetta di dare una risposta generale, si è deciso di dare un suggerimento consigliando agli studenti di tenere presente il numero n dei lati delle piastrelle e il numero m di piastrelle che hanno un vertice in comune. Questo aiuto è stato concordato ipotizzando che i ragazzi avrebbero avuto difficoltà nella scrittura della formula.
Considerati i due numeri interi del suggerimento, è ovvio che la somma delle misure degli angoli che hanno uno stesso vertice in comune deve essere 2π. L'ampiezza di ciascun angolo è data da $(n-2)\pi/n$, infatti gli n angoli di ciascun poligono hanno uguale ampiezza e la somma delle ampiezze è $(n-2)\,\pi$. Ricaviamo allora la relazione:

$$((n-2)\,\pi\,/\,n\,)*m = 2\pi$$

Questa si può scrivere $(n-2)m = 2n$ o anche $nm - 2m - 2n = 0$
In problemi analoghi a questo conviene cercare di fattorizzare l'espressione a primo membro. In questo caso si ha

$nm - 2m - 2n = (n-2)(m-2) - 4$, da cui si ricava

$(n-2)(m-2) = 4$, che rappresenta la formula finale che gli studenti dovrebbero determinare.
Questa suggerisce che tanto $n - 2$ quanto $m - 2$ devono essere presi tra i divisori di 4; questi sono 1, 2, 4. Si hanno allora le seguenti soluzioni:

$n - 2 = 1$, $m - 2 = 4$ *cioè* $n = 3$, $m = 6$
$n - 2 = 2$, $m - 2 = 2$ *cioè* $n = 4$, $m = 4$
$n - 2 = 4$, $m - 2 = 1$ *cioè* $n = 6$, $m = 3$

La prima soluzione rappresenta una piastrellatura a triangoli equilateri: sono sei le piastrelle che hanno in comune un vertice.

La seconda soluzione rappresenta una piastrellaura a quadrati: vi sono quattro piastrelle per ogni vertice.
La terza soluzione rappresenta una piastrellatura fatta di esagoni regolari: in ogni vertice se ne incontrano tre.
Vista la difficoltà dei passaggi, ci si aspettava che i ragazzi avrebbero almeno scritto la relazione $((n-2)\pi / n)*m = 2\pi$.
Risolto il problema della tassellazione del piano, si è concordato di fare utilizzare agli studenti le stesse forme di cartone per costruire i poliedri regolari possibili. La successiva scheda di lavoro prevista è quindi la seguente:

COMPITO 3

Ricordiamo che un *poliedro* si dice *regolare* se:

- **tutte le facce sono poligoni regolari uguali;**
- **in ogni vertice concorre un ugual numero di spigoli.**

Dunque ogni poliedro è caratterizzato da due numeri:

- **il numero dei lati di ogni faccia;**
- **il numero delle facce che concorrono in ogni vertice.**

Ricordando quanto fatto nell'attività precedente, scrivete una formula che vi permetta di dire quali combinazioni dei numeri precedenti permettono di costruire un poliedro regolare (ad esempio, per il cubo ogni faccia ha 4 lati e in ogni vertice concorrono 3 facce…) e trovatene tutte le possibili soluzioni.

Dopo aver ricordato la definizione di poliedro regolare e i due numeri interi che lo caratterizzano, ossia il numero p dei lati di ogni faccia e il numero q delle facce che concorrono in ogni vertice, i ragazzi avrebbero dovuto, tenendo presente la formula ricavata per la tassellazione del piano e aiutandosi con i cartoncini colorati, scrivere una formula in grado di determinare le combinazioni di numeri che avrebbero permesso di costruire un poliedro regolare.
Mentre infatti nel piano esistono poligoni regolari con un numero arbitrario di lati, nello spazio le situazioni possibili si riducono a cinque.
Infatti sia $\{p,q\}$ un poliedro regolare: se ad ogni vertice si ha un poligono di p lati, allora l'angoloide ha su ogni faccia un angolo di ampiezza
$(1 - 2/p)\pi$. Affinché le q semirette che concorrono per formare un angoloide non siano complanari, la somma di tutte queste ampiezze deve essere minore di 2π dunque

$q*(1 - 2/p)\pi < 2\pi$, cioè
$qp - 2q - 2p + 4 < 4$

$p(q-2) - 2(q-2) < 4$
$(p-2)(q-2) < 4$

In altre parole $(p-2)$ e $(q-2)$ sono due interi positivi il cui prodotto è minore di 4, cioè si hanno soltanto i seguenti casi:

$1*1 \quad 1*2 \quad 2*1 \quad 1*3 \quad 3*1$

che danno per $\{p,q\}$ i valori:

{3,3} tetraedro regolare;
{4,3} cubo;
{3,4} ottaedro regolare;
{3,5} icosaedro regolare;
{5,3} dodecaedro regolare.
Dunque sono possibili solo 5 poliedri regolari realizzabili con triangoli equilateri, quadrati e pentagoni.
Anche in questo caso si è ipotizzato che gli studenti avrebbero trovato alcune difficoltà nella determinazione della formula risolutiva, ma il suggerimento di tenere presente la relazione ricavata per la tassellazione del piano avrebbe semplificato la risoluzione.
Una volta determinato che sono solo 5 i poliedri regolari costruibili, i ragazzi avrebbero dovuto quindi indicare i loro nomi come richiesto nella scheda che segue:

COMPITO 4

Le soluzioni trovate nella scheda precedente sono:

Numero di lati di ogni faccia	**3**	**4**	**3**	**5**	**3**
Numero di facce che concorrono in ogni vertice	**3**	**3**	**4**	**3**	**5**

Quali sono i 5 poliedri regolari corrispondenti?
Si possono tutti costruire?

Terminate le attività previste per il secondo approfondimento, se fosse rimasto tempo a disposizione, sarebbe stata consegnata agli studenti un'ulteriore scheda di lavoro contenente la seguente richiesta:

COMPITO 5

Considerate la seguente sequenza di numeri

0 3 8 15 24 35 ………….

a continuatela con almeno altri due numeri.
Può contenere altri numeri primi?
(per rispondere può essere utile esprimere i termini con una formula).

Anche in questo caso l'obiettivo è far sì che i ragazzi, una volta determinata la relazione che lega i numeri della successione, siano in grado di esprimere i termini con una formula. L'aspettativa era che la maggior parte di loro, osservando che per passare da un numero all'altro si aggiunge ogni volta la quantità aggiunta per la coppia precedente aumentata di 2, avrebbero indicato correttamente i numeri 48 e 63, trovando però difficoltà nella scrittura di una formula basata su questo ragionamento di costruzione della successione. Infatti la formula che esprime i termini di questa successione è $n^2 – 1$, in quanto ogni termine è il quadrato della posizione che occupa nella successione diminuito di 1.
Determinata la formula corretta, la richiesta successiva di determinare se la sequenza di numeri può contenere altri numeri prime oltre al 3, richiede la capacità di interpretare la formula, cioè di capire "come è fatta" e darle significato. Le formule infatti si scrivono, si elaborano, si interpretano e si riutilizzano in un nuovo contesto.
La trasformazione della formula $n^2 – 1$ permette di scrivere la relazione
$n^2 – 1= (n+1)(n-1)$.
Ricordando quindi che un numero è primo se ha come unici divisori 1 e se stesso, poiché $n^2 – 1$ è il prodotto di due numeri, perché si primo deve essere $n – 1= 1$. Quindi l'unico numero primo della successione è 3.

3. ALLACONQUISTA DELLE FORMULE: DIVERSI ASPETTI DI UN PERCORSO A OSTACOLI – I PARTE

Il terzo approfondimento pomeridiano, fissato per il giorno Lunedì 5 Marzo 2007, avrebbe previsto la risoluzione, da parte dei ragazzi, di un problema, seguito dalla richiesta di costruzione di una formula e di alcune sue particolari interpretazioni.
La prima scheda preparata per l'approfondimento è la seguente:

COMPITO 1

Considerate la successione di figure di cui vengono riportate le prime tre.

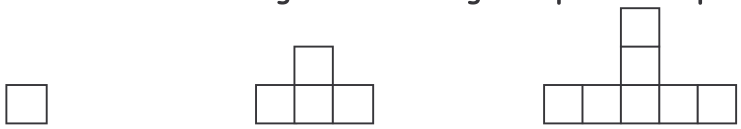


Figura 1 **Figura 2** **Figura 3** . . . .

In questa successione, ci sono figure con 1001 quadratini? E con 2002? E con 3003? Se sì, quante? Quali?

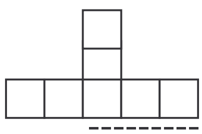
Con questo primo compito i ragazzi avrebbero dovuto, dopo aver osservato la successione di figure caratterizzate da un numero crescente di quadratini, individuare un legame tra ogni figura e la quantità di quadrati corrispondente, in modo tale da determinare l'esistenza di figure con 1001, 2002 e 3003 quadratini. Gli approcci e i metodi risolutivi del problema sono molti. Uno potrebbe essere quello di riconoscere che il numero di quadrati per ogni figura è un multiplo di tre aumentato di uno. La figura 1 ha infatti $3*0 + 1 = 1$ quadrati, la figura 2 ne ha $3*1 + 1 = 4$, la figura 3 ne contiene $3*2 +1 = 7$. Sulla base di questa regolarità, per determinare se 1001, 2002 e 3003 possono essere il numero di quadrati di una figura della successione, bisognerebbe quindi verificare se ognuno di essi, diviso per 3, ha resto 1. Operando in questo modo, solo 2002 soddisfa la richiesta, infatti $2002 = 3*667 + 1$. In particolare, la figura contenente 2002 quadrati sarà la numero 668.
La seconda richiesta proposta sarebbe quindi stata:

COMPITO 2

Quanti quadrati ha la figura n?

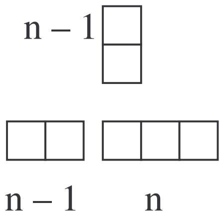
Il secondo compito vuole far sì che i ragazzi determinino una formula generale che permetta di stabilire il numero dei quadrati relativo alla figura n. Anche in questo caso i metodi risolutivi utilizzabili sono diversi.
Uno può essere quello di operare su una cosiddetta generica figura, ossia sulla figura n, e riconoscere che vi sono n quadrati in una delle braccia che, a partire dal quadrato centrale, si estende lateralmente.

Figura n



n

Un modo di procedere è ora quello di determinare il numero di quadrati delle altre braccia della figura.

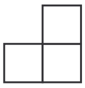
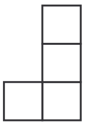
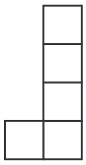
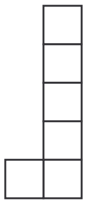
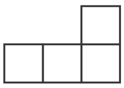
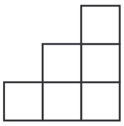
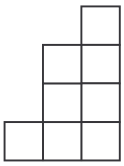
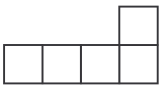
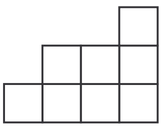
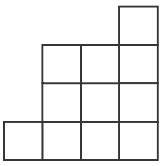
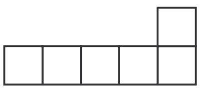


Osservato che sono composte da $n - 1$ quadrati ciascuna, si può concludere che il numero dei quadrati è dato da $n + (n - 1) + (n - 1)$.

Determinata quindi la relazione che permette di determinare il numero di quadrati di ogni figura della successione, sarebbe stata consegnata la terza scheda di lavoro, che presenta un problema dello stesso tipo, ma con un maggiore grado di difficoltà.

COMPITO 3

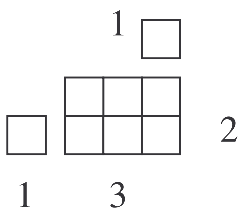
Considerate ora la seguente tabella:

	1	2	3	4	5
1					. . . .
2				. . . .	. . . .
3				. . . .	. . . .
4		. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
5	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

1. **Qual è il numero dei quadratini della figura nella riga 100 e colonna 13?**
2. **Spiegate come trovare il numero dei quadratini di una data figura.**
3. **Scrivere una formula matematica per determinare il numero dei quadratini . . .**

Il problema proposto in questa terza scheda aumenta di difficoltà in quanto, a differenza del quesito precedente dove il legame da trovare era tra il numero dei quadratini e il numero della figura corrispondente, in questo caso il numero dei quadrati è legato a due variabili, il numero di riga e quello di colonna che determinano la casella in cui si trova la figura. Osservando le figure che costituiscono la tabella, in ogni costruzione è possibile distinguere il primo quadrato a sinistra del braccio orizzontale e il primo quadrato in alto del braccio verticale. Togliendo questi due quadrati, il numero dei rimanenti è dato dal numero della colonna della casella in cui si trova la figura, moltiplicato per il numero della riga.

Figura nella casella di riga 3 e colonna 2



Nell'esempio della figura nella casella di riga 3 e colonna 2 il numero di quadrati è 3*2 + 2 = 8.
Generalizzando, se indichiamo con *n* il numero di riga e con *m* il numero di colonna, il numero di quadrati della casella di riga *n* e colonna *m* è dato da $n*m + 2$.
In questo modo, è immediato determinare la quantità di quadrati della figura di riga 100 e colonna 13: 100*13 + 2 = 1302.
L'ultimo compito previsto è infine il seguente:

COMPITO 4

Fissato un numero naturale, esistono nella tabella figure con un numero di quadrati pari al numero fissato? Quante?
In quali casi esiste?
In quali casi ne esiste una sola?
In quali casi ne esistono due?
In quali casi ne esistono più di due?

Con questo ultimo problema si vuole affrontare una nuova questione, mostrando quindi che, dato un problema da cui partire e relativamente al quale viene costruita una formula, la relazione determinata può poi

diventare oggetto di interpretazione, dando gli spunti per affrontare questioni nuove e diverse.
Tenendo presente la relazione trovata nel compito precedente, $n*m + 2$, si può innanzitutto osservare che le figure esistono se il numero naturale è maggiore o uguale a 3. In tabella, infatti, non ci sono figure con meno di 3 quadrati. In particolare, in corrispondenza di 3 esiste un'unica figura.
Se indichiamo con N il numero naturale fissato, allora $n*m + 2 = N$, cioè $n*m = N - 2$. Quindi, se $N - 2$ è primo, esistono due figure aventi N quadrati, mentre se $N - 2$ non è primo, ne esistono più di due. Il numero delle figure è dato dal numero di divisori di $N - 2$.

4. ALLACONQUISTA DELLE FORMULE: DIVERSI ASPETTI DI UN PERCORSO A OSTACOLI – II PARTE

Il quarto e ultimo approfondimento, fissato per il giorno Mercoledì 7 Marzo 2007, sarebbe stato una prosecuzione del terzo, proponendo altri problemi di messa in formula e compiti simili a quelli dell'incontro precedente, per i quali si richiede però una particolare interpretazione delle formule, che in questo incontro sarebbero state fornite ai ragazzi, permettendo quindi loro di compiere il percorso inverso: dalla formula alla sua interpretazione.
L'approfondimento avrebbe proposto per primo il seguente compito:

COMPITO 1

Spiegare come si può determinare il numero delle diagonali di un poligono (non necessariamente regolare).
Scrivere una formula per calcolare il numero delle diagonali di un poligono (non necessariamente regolare).

Con questo primo problema, si vuole chiedere ancora ai ragazzi di costruire una formula che permetta di dare una risposta generale al quesito proposto. Si tratta di un compito di carattere geometrico, che gli studenti avrebbero dovuto risolvere ricordando il concetto di diagonale di un poligono e il modo che permette di determinare il loro numero, tutte cose che i ragazzi solitamente studiano nel biennio. I ragazzi non avrebbero quindi trovato difficoltà nel risolvere questo problema e sicuramente sarebbe risultato per loro utile aiutarsi con disegni. Il passo successivo sarebbe quindi stato quello di tradurre la risposta in una formula generale applicabile ad un poligono di V vertici. Accorgendosi infatti che la diagonale deve congiungere due vertici non consecutivi, da ogni vertice usciranno V-3 diagonali. Questa quantità è valida per ogni vertice, quindi va moltiplicata per V; infine, tenendo conto che ogni diagonale congiunge

due vertici, la quantità trovata in precedenza va divisa per 2. Il numero di diagonali in un poligono di V vertici è quindi $V*(V-3)/2$.
Risolto questo primo compito, i ragazzi avrebbero quindi dovuto risolvere il secondo problema preparato:

COMPITO 2

Durante una lezione di matematica, l'insegnante divide gli studenti in quattro gruppi di lavoro e chiede di determinare il numero di quadrati della figura n di una successione di figure (vedi sotto).

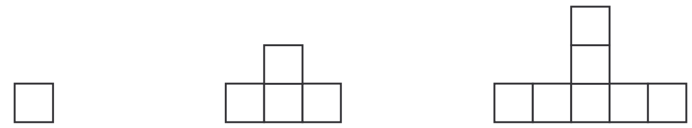


Figura 1 Figura 2 Figura 3 . . . .

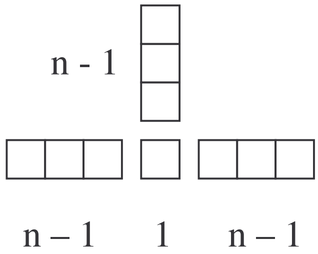
I quattro gruppi, dopo qualche riflessione e senza compiere trasformazioni algebriche, determinano quattro formule (vedi tabella).

Gialli	3(n-1)+1
Rossi	n+2(n-1)
Trasparenti	2[n+(n-1)]-n
Fosforescenti	3n-2

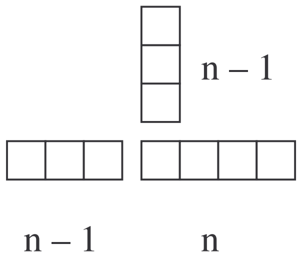
L'insegnante, accolto il materiale, esce dalla classe. A casa tenta di capire come hanno ragionato i suoi allievi. Dopo un po' di lavoro, anche se non può avere certezze, si ritiene soddisfatta.
Secondo voi, come hanno ragionato gli studenti dei vari gruppi?

Con questo secondo compito viene proposto lo stesso problema dell'approfondimento precedente, presentato però da un punto di vista completamente diverso. Mentre nell'incontro precedente i ragazzi erano chiamati a costruire una formula che permettesse di determinare il numero di quadrati della figura n della successione, con questo problema, viene presentato il compito già risolto in quattro modi diversi ma equivalenti e i ragazzi devono riflettere sui ragionamenti sulla base dei quali le quattro relazioni sono state costruite. L'obiettivo è quindi condurre gli studenti alla riflessione e alla interpretazione di formule apparentemente diverse ma equivalenti in quanto sono modi diversi per esprimere uno stesso numero.
Ragionando sulle figure della successione, si può osservare che:

- La generica figura n ha n-1 quadrati in ognuna delle tre braccia, a cui bisogna aggiungere il quadratino centrale. In questo modo il numero totale di quadrati è *3*(n-1)+1*, che corrisponde alla prima formula indicata.



- La figura n ha n quadrati in una delle braccia che, a partire dal quadrato centrale, si estende lateralmente, mentre le altre due sono composte da n – 1 quadrati ciascuna. Il numero complessivo dei quadrati è quindi dato da *n+2(n-1)*, cioè la seconda formula proposta.



- La generica figura n si può considerare composta da due braccia con n quadrati e da due con n- 1 quadrati, che si sovrappongono, a cui vanno sottratti n quadrati: quello centrale che era stato contato due volte e gli n-1 di un braccio. In questo modo il numero complessivo di quadrati è dato da *2[n+(n-1)]-n*, cioè la terza formula presentata.

- Infine, la generica figura n si può considerare composta da tre braccia uguali che si sovrappongono, ognuna con n quadrati. A questo numero va sottratto due volte il quadrato centrale, che nella sovrapposizione era stato contato tre volte. Il numero complessivo di quadrati è quindi dato da *3n-2*, cioè la quarta formula proposta.

Risolto questo secondo problema proposto, sarebbe stato assegnato il quarto e ultimo compito:

COMPITO 3

Durante la lezione di matematica, l'insegnante divide gli studenti in quattro gruppi di lavoro e chiede di determinare il numero di quadrati della figura n di una successione di figure (vedi sotto).

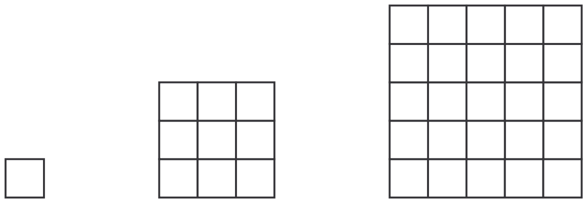


Figura 1 Figura 2 Figura 3 . . . .

I quattro gruppi, dopo qualche riflessione e senza compiere trasformazioni algebriche, determinano quattro formule (vedi tabella).

Gialli	$(2n-1)^2$
Rossi	$4(n-1)^2 +4(n-1)+1$
Trasparenti	$4n^2-4n+1$
Fosforescenti	$4n^2-4(n-1)-3$

L'insegnante, raccolto il materiale, esce dalla classe. A casa tenta di capire come hanno ragionato i suoi allievi. Dopo un po' di lavoro, anche se non può avere certezze, si ritiene soddisfatta.
Secondo voi, come hanno ragionato gli studenti dei vari gruppi?

Questo quarto problema proposto è analogo al precedente: i ragazzi sono chiamati a riflettere sul ragionamento utilizzato per costruire quattro formule risolutive equivalenti. Ciò che cambia è il tipo di problema: si ha sempre a che fare con una successione di figure composte da quadratini, la cui costruzione è però differente da quella della sequenza di figure presentate nel compito tre.
Osservando le figure della successione si può concludere che:

- Il lato del generico quadrato n è composto da 2n-1 quadratini. Il numero complessivo di quadratini è quindi dato dall'area del quadrato, cioè $(2n\text{-}1)^2$.

- Il generico quadrato n si può considerare composto da 4 quadrati di lato n-1, da 4 rettangoli composti da n-1 quadrati e da un quadratino. Il numero complessivo dei quadratini è quindi dato da $4(n-1)^2 +4(n-1)+1$
- Il generico quadrato n si può supporre composto da quattro quadrati di lato n. Il calcolo dell'area di questi quadrati porta ad ottenere un numero di quadratini superiore a quelli che compongono la figura, in particolare ne sono stati contati 4n-1 in più, che vanno quindi sottratti al numero determinato calcolando l'area dei quattro quadrati. Il numero complessivo di quadratini è quindi $4n^2-4n+1$.
- Infine, il generico quadrato n si può considerare ancora composto da quattro quadrati di lato n e osservare che la somma delle aree di questi quattro quadrati porta a determinare un numero di quadrati che supera di 4(n-1)+3 il numero di quadratini della figura. In questo modo il numero complessivo di quadratini è dato da $4n^2-4(n-1)-3$.