Matematiche Complementari *25 gennaio 2011*

1. Enunciare e dimostrare il teorema della divisione con resto nell'insieme dei numeri naturali.

2. Qual è l'ultima cifra del numero $\frac{33^{66}}{3}$? Tale numero è divisibile per 7? In caso negativo quale è il resto?

3. In $Z_5[x]$ il polinomio $p(x)= x^4+4x+1$ è riducibile? In caso affermativo fattorizzarlo.
Scrivere un altro polinomio in $Z_5[x]$ che abbia la stessa funzione polinomiale associata di $p(x)$. Come si rappresentano tutti i polinomi di $Z_5[x]$ con funzione polinomiale associata nulla?
Il polinomio $p(x)$ è riducibile in $\mathbb{R}[x]$? Giustificare la risposta

4. Dare la definizione di sistema di numerazione, distinguendo fra sistema semplice e sistema complesso.
Considerati poi i sistemi di numerazione polinomiale illustrare, con opportuni esempi, metodi per passare dalla rappresentazione di un numero in una base a quella in un'altra base. (Utilizzare per gli esempi basi entrambe diverse dalla base 10).
Elencare, fornendo giustificazioni o esempi, proprietà che dipendono e proprietà che non dipendono dalla base di rappresentazione.

5. Trovare il polinomio minimo di $\sqrt[3]{3}+2$ su $\mathbb{Q}$.
Che relazione c'è tra $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}+2)$ e $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$?
$\sqrt[3]{3}+2$ è algebrico su $\mathbb{Q}(e)$? e su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$?
Giustificare ogni risposta.

Matematiche Complementari *1 marzo 2011*

1. Nel sistema di Peano ($P,Sc,1$), definire la moltiplicazione dopo aver enunciato il teorema di recursione nella forma adatta al suo utilizzo per la definizione richiesta.
Dimostrare poi che la moltiplicazione è commutativa.

2. Le equazioni $2x+3y=a,\ a\in Z$ e $2x+4y=b,\ b\in Z$ ammettono sempre soluzioni in Z ? In caso affermativo determinarle.

3. Esistono numeri periodici in qualunque base di rappresentazione b>1?
Giustificare la risposta
Illustrare il problema della determinazione della lunghezza dell'eventuale periodo e dell'antiperiodo nella scrittura decimale di un numero razionale.
Applicare quanto esposto alla determinazione della lunghezza del periodo e dell'eventuale antiperiodo della scrittura decimale del numero $\frac{15}{63}$

4. Dimostrare che $e^{\sqrt{2}}$ è trascendente su Q, considerare il campo $Q(e^{\sqrt{2}})$ e caratterizzarne gli elementi. Stabilire le eventuali relazioni di inclusione tra $Q(e^{\sqrt{2}})$,$Q(e^2)$, $Q(\sqrt{e})$ e $Q(e)$ giustificando le risposte.
Indicare almeno un numero $\alpha>100$ algebrico su $Q(e^{\sqrt{2}})$, non appartenente ad esso e trascendente su Q .

5. Dopo aver motivato il fatto che il poligono di 3 lati e quello di 5 lati sono costruibili, discutere e, se necessario, correggere la seguente affermazione:
"I poligoni di 15k lati sono costruibili $\forall k$ naturale."

Matematiche Complementari *6 giugno 2011*

1. Definire in (*P,Sc,1*) l'usuale ordinamento e dimostrare che si tratta di una relazione d'ordine totale.

2. Discutere il problema della riducibilità di un polinomio in

Z[x], Q[x], R[x], C[x].

Cosa si può dire, in base a quanto visto in teoria, del polinomio

$x^6+9x^5+6x^2+21x+15$?

3. a) Qualunque sia il numero naturale X>2 il numero che in quella base di numerazione si scrive 1211001 non è primo.

Vero o falso?

Discutere l'affermazione con opportuni riferimenti alla teoria svolta

b) Qual è il resto nella divisione per 11 del numero 7^{7001}? Giustificare la risposta.

4. a) Si consideri l'estensione $\mathbb{Q}(i\sqrt[3]{7})$. Il numero $\sqrt[3]{7}+2i$ appartiene a tale campo? In caso affermativo è possibile rappresentarlo con un polinomio di grado 6 in $i\sqrt[3]{7}$? E con un polinomio di terzo grado? Giustificare le risposte e fornire, se possibile, le rappresentazioni richieste.

b) Dimostrare che $\log_2 7$, $log_e 7$ sono trascendenti rispetto a $\mathbb{Q}$.

5. Fra i poligoni regolari con un numero dispari di lati, indicarne due costruibili con riga e compasso e due non costruibili e per ognuno spiegare esaurientemente perché è costruibile o non costruibile.

Matematiche Complementari 7 luglio 2011

1. Enunciare gli assiomi di Peano e discuterne l'indipendenza.

2. E' vero che qualunque siano i numeri naturali *k, m* $5^{5k+1}+4^{5m+2}+1$ è divisibile per 11? Quali risultati teorici ci possono essere utili per rispondere?

3. Dimostrare che in ogni sistema di numerazione con base di rappresentazione b>1 esiste almeno una frazione che dà luogo a un numero periodico.
   E' vero che un numero scritto in base 5 è periodico se è solo se scritto in base 10 è periodico? E' possibile generalizzare quanto trovato?

4. Per ciascuno dei seguenti numeri dire se è algebrico o trascendente rispetto a $\mathbb{Q}$ e dimostrare quanto affermato:
   $$\log_2 10,\ \log_e 10,\ e^{\pi}$$
   Considerata una delle corrispondenti estensioni, rappresentarne gli elementi.
   Considerata poi l'estensione $\mathbb{Q}(\sqrt{5}+i)$ rappresentarne gli elementi.

5. I poligoni regolari di 14, 15 e 16 lati sono costruibili con riga e compasso? Giustificare ogni risposta dimostrando gli eventuali risultati richiamati.

Matematiche Complementari 19 settembre 2011

1. a) Nell'insieme dei numeri naturali definire la relazione di divisibilità e dire di quali delle seguenti proprietà gode, giustificando le risposte:
riflessiva, transitiva, simmetrica, antisimmetrica, tricotomica.

b) Sia *a, b, c* una terna pitagorica. E' vero che il prodotto *abc* è divisibile per 30? E per 60? Giustificare le risposte.

2. Date le successioni:

$$a_0 = 1 \qquad\qquad b_0 = 1$$
$$a_1 = 2 \qquad \text{e} \qquad b_1 = 2$$
$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \text{per } n \geq 2 \qquad\qquad b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2} \quad \text{per } n \geq 2$$

utilizzarle come sistemi di numerazione e dire per ognuna di quale tipo di sistema di numerazione si tratta. Illustrarne le proprietà anche con l'aiuto di esempi opportuni.

3. Determinare la funzione polinomiale associata al polinomio $2x^2+3$ in $\mathbb{Z}_5[x]$. Scrivere almeno un altro polinomio in $\mathbb{Z}_5[x]$ che abbia la stessa funzione polinomiale associata.
Studiare la riducibilità di $2x^2+3$ in $\mathbb{Z}_5[x]$.
Discutere il problema della riducibilità di un polinomio in $\mathbb{R}[x]$.

4. Considerare l'estensione Q($\log_2 5$), dire di che tipo di estensione si tratta e rappresentarne gli elementi.
Fornire un esempio di:
- numero trascendente su Q, algebrico su Q($\log_2 5$) e non appartenente ad esso
- numero algebrico su Q, algebrico su Q($\log_2 5$) e non appartenente ad esso

Fornire l'esempio di due estensioni algebriche di Q isomorfe e di altre due non isomorfe.
Giustificare tutte le risposte.

5. a) Sia n un numero naturale non divisibile per 11. Si può affermare che $n^{10k} - 1$ è divisibile per 11 per ogni *k* naturale? Quali risultati teorici si possono utilizzare per rispondere?
b) Qual è il resto nella divisione per 11 del numero 17^{17017}? Giustificare la risposta.