Matematiche Complementari   27 gennaio 2010

1. Nel sistema matematico (*P, Sc, 0*) dei numeri naturali definire l'usuale ordinamento e la relazione di divisibilità e per entrambi dire di che tipo di relazione si tratta dimostrandone le proprietà.
Dimostrare poi che per ogni *a*, *b* naturali con *a*, *b* diversi da zero $a/b \Rightarrow a \le b$

2. Siano *a*, *b*, *c* numeri naturali non nulli, primi fra loro e sia $a^2 + b^2 = c^2$.
Dimostrare che 12 divide *ab* e 60 divide *abc*.

3. Considerare la successione $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = 7n - 2 \quad \forall n > 0 \end{cases}$ dire perché può essere assunta come sistema di numerazione e illustrarne le caratteristiche fornendo opportuni esempi di rappresentazioni di numeri.
Considerati poi i sistemi di numerazione con base di rappresentazione, illustrare un metodo per passare dalla rappresentazione di un numero in una base a quella in un'altra base ed applicarlo ad un esempio con basi entrambe diverse dalla base 10.

4. Fra i poligoni regolari con un numero pari di lati, indicarne due costruibili con riga e compasso e due non costruibili e per ognuno spiegare esaurientemente perché è costruibile o non costruibile.

5. Trovare il polinomio minimo di $\sqrt{2} + i$ sul campo $\mathbb{Q}$.
Considerata l'estensione $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2} + i\right)$, dire di che tipo di estensione si tratta e rappresentarne gli elementi. Rappresentare in particolare $5 + i\sqrt{2}$, $7i$ e $3\sqrt{2}$ come polinomi in $\left(\sqrt{2} + i\right)$ a coefficienti in $\mathbb{Q}$.

Matematiche Complementari 18 febbraio 2010

1. Nel sistema matematico (*P,Sc,0*) dei numeri naturali definire la moltiplicazione e dimostrare che valgono le seguenti proprietà:
$xy=0 \Leftrightarrow x=0 \vee y=0$
$xy=1 \Leftrightarrow x=1 \wedge y=1$

2. Data la successione (di Fibonacci):

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{per } n \geq 2 \end{cases}$$

dimostrare che a_n e a_{n+1} sono primi fra loro $\forall n$.
Dire come tale successione può essere utilizzata per costruire un sistema di numerazione (sistema di numerazione di Fibonacci). Di quale tipo di sistema di numerazione si tratta? Illustrarne le proprietà anche con l'aiuto di esempi opportuni.

3. Discutere le seguenti affermazioni con opportuni riferimenti alla teoria svolta.

- Qualunque sia il numero naturale X>2 il numero che in quella base di numerazione si scrive 12122121 non è primo.
- Qualunque siano i numeri naturali *k, m, n* $2^{3k+2} + 3^{6m+2} + 4^{3n}$ è divisibile per 7

4. Dopo aver dimostrato che $e^{\sqrt{2}}$ è trascendente su *Q*, si consideri $Q(e^{\sqrt{2}})$ e, se è possibile, si dia l'esempio di:

- un numero algebrico su $Q(e^{\sqrt{2}})$, non appartenente a $Q(e^{\sqrt{2}})$ e algebrico su *Q*
- un numero algebrico su $Q(e^{\sqrt{2}})$, non appartenente a $Q(e^{\sqrt{2}})$ e trascendente su *Q*.

Giustificare le risposte.
Stabilire le eventuali relazioni di inclusione e di isomorfismo tra:
$Q(e)$, $Q(e^{\sqrt{2}})$, $Q(\sqrt{e})$, $Q(e^{\frac{1}{3}})$

5. Le seguenti equazioni ammettono soluzioni in Z?
In caso affermativo determinarle

$5x+4y=2$
$4x+10y=6$
$24x+6y=2$

Matematiche Complementari *10 giugno 2010*

1. Enunciare e dimostrare la “legge di annullamento del prodotto” in (P,Sc,0) e in $\mathbb{Z}$

2. Calcolare $\sum_{i=0}^{13} 5^i$ modulo 7. Quali proprietà si possono utilizzare per rispondere?

3. Giustificare la “regola” che consente di passare da un numero decimale periodico alla sua frazione generatrice.
Esistono numeri periodici in qualunque base di rappresentazione?
Giustificare la risposta

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando le risposte:
a) pentagono, decagono e poligono regolare di 15 lati sono costruibili con riga e compasso.
b) $\forall n \in N$ il poligono di $5n$ lati è costruibile.

5. Trovare il polinomio minimo di $\sqrt{3} - i$ sul campo $\mathbb{Q}$.
Considerata l’estensione $\mathbb{Q}(\sqrt{3} - i)$, dire di che tipo di estensione si tratta e rappresentarne gli elementi. Rappresentare, se possibile, $2 + i\sqrt{3}$ come polinomio in $(\sqrt{3} - i)$ a coefficienti in $\mathbb{Q}$. Quale grado può avere il polinomio?