Matematiche Complementari 22 gennaio 2014

1. Nel sistema matematico ($P,Sc,0$) dei numeri naturali definire l'addizione e la moltiplicazione e dimostrare che valgono le seguenti proprietà:

$$x+y=0 \Leftrightarrow x=0 \wedge y=0$$
$$x+y=1 \Leftrightarrow (x=0 \wedge y=1) \vee (x=1 \wedge y=0)$$
$$xy=0 \Leftrightarrow x=0 \vee y=0$$

2. Enunciare e giustificare criteri di divisibilità per n-1 e per $n+1$ per numeri scritti in base n (n naturale >2).

3. Considerare l'estensione $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2^2})$ e dare due rappresentazioni diverse di $\sqrt[5]{2}+2$ con polinomi di grado 6 in $\sqrt[5]{2^2}$. E' possibile rappresentare $\sqrt[5]{2}+2$ con un polinomio di secondo grado in $\sqrt[5]{2^2}$? Enunciare il teorema di rappresentazione per le estensioni algebriche semplici e discuterne la coerenza con l'esercizio proposto. Che relazione c'è fra $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2^2})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$?

4. Fra i poligoni regolari con n lati, n numero naturale dispari >5, indicarne uno costruibile e uno non costruibile con riga e compasso e dimostrare quanto affermato.

5. Considerato $Z_2[x]$, esaminare il problema della riducibilità del polinomio ax^2+bx+c in $Z_2[x]$. Scrivere poi, se possibile, due polinomi distinti in $Z_2[x]$ con associata la stessa funzione polinomiale di x^2+1.
Indicare un campo diverso da Z_2 e dal campo complesso su cui x^2+1 è riducibile.

Matematiche Complementari *19 febbraio 2014*

1. In $\boldsymbol{Z}$ dopo aver definito il prodotto dimostrare che gli unici elementi invertibili sono 1 e -1.

2. Dimostrare che in ogni sistema di numerazione con base di rappresentazione $b>1$ esiste almeno una frazione che dà luogo a un numero periodico.
Dati a e b numeri naturali maggiori di 1, con $mcd(a,b)=1$, si discutano le eventuali relazioni fra la periodicità di un numero quando è scritto in base a e quando è scritto in base ab.

3. Dire quali dei seguenti numeri sono trascendenti rispetto a **Q** giustificando le risposte:

$$log_2 6,\ ln6,\ e^{i\pi},\ e^{2\pi},\ e^{\ln 6},\ \sqrt[5]{6}\, i$$

Considerate le corrispondenti estensioni di **Q** dire se vi sono relazioni di inclusione e/o di isomorfismo fra di esse.

4. In $Z_2[x]$ il polinomio $p(x)=x^6+1$ è riducibile? In caso affermativo scriverlo come prodotto di fattori irriducibili. Scrivere un altro polinomio in $Z_2[x]$ che abbia la stessa funzione polinomiale associata di $p(x)$. Come si possono rappresentare tutti i polinomi di $Z_2[x]$ con funzione polinomiale associata nulla?
Il polinomio $p(x)$ è riducibile in $\mathbb{R}[x]$? Giustificare la risposta

5. Discutere la risolubilità in Z delle equazioni $ax+5y=2,\ a\in Z$ e $2x+6y=b,\ b\in Z$? Fornire esempi opportuni.

Matematiche Complementari 18 settembre 2014

1. Nel sistema matematico ($P,Sc,1$) dei numeri naturali, definire l'addizione, enunciarne la legge di cancellazione e dimostrarla.

2. Qual è l'ultima cifra in base 8 del numero $\sum_{n=1}^{99} n!$?

$5^{2014}+2$ è divisibile per 11?
Giustificare le risposte

3. Sia a, b, c una terna pitagorica. E' vero che il prodotto abc è divisibile per 15? e per 60? Giustificare le risposte.

4. Dimostrare che $e^{\sqrt[3]{2}}$ è trascendente su Q, considerare il campo $Q(e^{\sqrt[3]{2}})$ e caratterizzarne gli elementi. Stabilire le eventuali relazioni di inclusione tra $Q(e^{\sqrt[3]{2}})$, $Q(e^3)$, $Q(\sqrt[3]{e})$ e $Q(e)$ giustificando le risposte.

Indicare almeno un numero $\alpha>100$ algebrico su $Q(e^{\sqrt[3]{2}})$, non appartenente ad esso e trascendente su Q .

5. Dopo aver motivato il fatto che il poligono di 3 lati, quello di 5 lati e quello di 15 lati sono costruibili, discutere e, se necessario, correggere la seguente affermazione:
"I poligoni di $15k$ lati sono costruibili $\forall k$ naturale."